Corrigé de l'épreuve finale

Exercice 1. (6 points)

1. **Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:**

$$\mathcal{P}(n) : \quad \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Pour $n=1$, on a : $1 \cdot 2 = 2$ et $\dfrac{2 \cdot 3}{3} = 2$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a par hypothèse :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\
&= (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3}+1\right) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3},
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

2. **Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = ln\left(|x| + \frac{1}{e}\right)$ n'est pas injective.**

L'application f n'est pas injective car il existe deux réels, n_1 et n_2 différents tels que $f(n_1) = f(n_2)$ et $n_1 \neq n_2$. On peut prendre par exemple $n_1 = -1$ et $n_2 = 1$ $f(-1) = f(1) = \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right)$

3. **Soit $f(x) = E(2x) - 2E(x)$. Calculer $f(x)$ pour $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et pour $x \in [\frac{1}{2}, 1[$.**

— Pour $x \in [0, \frac{1}{2}[$, on a :

$$\begin{cases} 0 \leq 2x < 1 \Rightarrow E(2x) = 0, \\ E(x) = 0, \end{cases} \qquad \Rightarrow f(x) = 0.$$

— Pour $x \in [\frac{1}{2}, 1[$, on a :

$$\begin{cases} 1 \leq 2x < 2 \Rightarrow E(2x) = 1, \\ E(x) = 0, \end{cases} \qquad \Rightarrow f(x) = 1.$$

4. **Soit $A = \left\{\dfrac{1+x}{x+2} \mid x \in]-\infty, -3]\right\}$, déterminer, s'ils existent, $\sup A$, $\inf A$, $\min A$ et $\max A$.**

On pose $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$.

La fonction f est définie, continue et dérivable sur l'intervalle $]-\infty,-3]$.
De plus, pour tout $x \in]-\infty,-3]$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0,$$

alors, f est strictement croissante sur $]-\infty,-3]$. On déduit que :

$$\forall x \in]-\infty,-3], \quad f(x) \leq f(-3) = 2 = \max A = \sup A$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 = \inf A,$$

le $\min A$ n'existe pas, car l'équation $\frac{x+1}{x+2} = 1$, n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$, donc $1 \notin A$.

Exercice 2. (8 points)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x - bsin(x), & x \leq 0 \\ \dfrac{a - cos(x)}{x}, & x > 0. \end{cases} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux paramètres réels}$$

1. **Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$.**

• **La continuité de f sur $\mathbb{R}^*$:**

— Pour $x \in]-\infty,0[$, la fonction f est la somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $]-\infty,0[$.

— Pour $x \in]0,+\infty[$, f est le produit de deux fonctions continues, l'une est la fonction $x \mapsto a - cos(x)$ continue sur $\mathbb{R}$, l'autre est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ continue sur $\mathbb{R}^*$ donc f est continue sur $]0,+\infty[$.

• **La dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$:**

Pour les mêmes raisons que précédemment f est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.

• La dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$ est donnée par

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - bcos(x), & x < 0 \\ \dfrac{xsin(x) + cos(x) - a}{x^2}, & x > 0. \end{cases}$$

2. **Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en** 0.

La fonction f est continue en 0 si est seulement si $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = f(0)$.
On a

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} x - bsin(x) = 0 = f(0),$$

et

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{a - cos(x)}{x} = \begin{cases} \infty, & \text{si } a \neq 1\,; \\ \text{forme indéterminée } \frac{0}{0}, & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

Pour lever la forme indéterminée de la limite dans le cas où $a = 1$, on applique la règle de l'Hopital. Soient

$$\begin{cases} g(x) = 1 - cos(x) \Rightarrow g'(x) = sin(x), \\ h(x) = x \Rightarrow h'(x) = 1 \end{cases}$$

Remarque : Les conditions d'application de la règle de l'Hopital sont satisfaites. En effet, g et h sont deux fonctions définies, continues, et dérivables au voisinage de 0 *et* h' *ne s'annule pas.* On obtient

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{x\to 0^+} sin(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{1-cos(x)}{x} = 0.$$

Ainsi, pour que f soit continue en 0, il faut que $a = 1$.

3. **Déterminer la valeur de b pour que f soit dérivable en** 0.
f est dérivabale en 0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = l \quad (C)$.

(i) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x - bsin(x)}{x}$ est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On applique la règle de l'Hopital, on obtient

$$\lim_{x\to 0^-} 1 - bcos(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x - bsin(x)}{x} = 1 - b.$$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-cos(x)}{x^2}$ on a aussi une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On applique deux fois la règle de l'Hopital, on obtient

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{cos(x)}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{sin(x)}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{1-cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

D'où, en utilisant la condition (C) de dérivabilité de f en 0, on a

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x-bsin(x)}{x} = 1 - b, \\ et \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow b = \frac{1}{2}.$$

(a) **On fixe $a = 1$ et $b = \frac{1}{2}$.**

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{sin(x)}{2}, & x \leq 0 \\ \frac{1-cos(x)}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

i. **Énoncer le Théorème de Rolle :** Voir le cours.

ii. **Montrer qu'il existe $c \in]0, 2\pi[$ tel que $f'(c) = 0$.**
La fonction f est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$ et $f(0) = f(2\pi) = 0$, alors d'après le Théorème de Rolle il existe au moins $c \in]0, 2\pi[$ tel que $f'(c) = 0$.

iii. **Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, la fonction f est strictement croissante.**
De la question (1), on a : $f'(x) = \frac{xsin(x) + cos(x) - 1}{x^2} > 0$ car $xsin(x) + cos(x) - 1 > 0$, pour tout $x \in]0, 1[$. Donc, f est strictement croissante.

USTHB

iv. **En déduire que f est bijective de $]0,1[$ dans J.**

f est continue et strictement croissante sur $]0,1[$, d'après le Théorème de la bijection, on déduit que f réalise une bijection de $]0,1[$ sur $J = f(]0,1[) =]f(0), f(1)[=]0, 1-cos(1)[$.

Exercice 3 . (6 points)

Soit

$$f(x) = \frac{e^{1+arctan(x)}}{cos(2x)}.$$

(a) **Le DL de la fonction f au voisinage de 0.**

$$\begin{aligned} cos(x) &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3), \\ arctan(x) &= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), \\ e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

On calcule d'abord le DL de $e^{1+arctan(x)}$. On a :

$$1 + arctan(x) = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

alors,

$$e^{1+arctan(x)} = e^{1+x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)} = e\left(e^{x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}\right).$$

Ensuite, on pose $u = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ avec $u \to 0$ quand $x \to 0$, ce qui donne :

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{3!}u^3 + o(u^3),$$

d'où,

$$\begin{aligned} e^{x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)} &= 1 + \left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) + \frac{1}{2!}\left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)^3 + o(x^3), \end{aligned}$$

on développe l'expression ci-dessus en ne gardant que les monômes de degrés inférieurs ou égals à 3, on obtient

$$e^{x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

D'où

$$e^{1+arctan(x)} = e\left(e^{x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}\right) = e\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right).$$

Comme $\cos(2x) = 1 - \frac{1}{2!}(2x)^2 + o((2x)^3) = 1 - 2x^2 + o(x^3)$.

Alors,

$$f(x) = \frac{e\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)}{1 - 2x^2 + o(x^3)}.$$

USTHB

Pour calculer le DL du quotient $\dfrac{1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{1-2x^2+o(x^3)}$, on peut appliquer l'une des méthodes suivantes :

Méthode 1 : On effectue la division suivant les puissances croissantes :

$$
\begin{array}{cccc|c}
1 & +x & +\frac{1}{2}x^2 & -\frac{1}{6}x^3 & 1-2x^2 \\ \cline{5-5}
-1 & & +2x^2 & & 1+x+\frac{5}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3 \\ \cline{1-4}
 & x & +\frac{5}{2}x^2 & -\frac{1}{6}x^3 & \\
 & \text{-}x & & +2x^3 & \\ \cline{1-4}
 & & \frac{5}{2}x^2 & +\frac{11}{6}x^3 & \\
 & & -\frac{5}{2}x^2 & & \\ \cline{1-4}
 & & & \frac{11}{16}x^3 &
\end{array}
$$

D'où,

$$\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{1-2x^2+o(x^3)} = 1+x+\frac{5}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3+o(x^3).$$

Au final, on obtient

$$f(x) = e+ex+\frac{5e}{2}x^2+\frac{11e}{6}x^3+o(x^3).$$

Méthode 2 :

On a

$$
\begin{aligned}
\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{1-2x^2+o(x^3)} &= \left(1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)\frac{1}{1-2x^2+o(x^3)} \\
&= \left(1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)\frac{1}{1+h}
\end{aligned}
$$

avec $h=-2x^2+o(x^3)$ tel que $h\to 0$ quand $x\to 0$. Le DL de $\dfrac{1}{1+h}$ à l'ordre 3 est donné par

$$\frac{1}{1+h} = 1-h+h^2-h^3+o(h^3).$$

Ainsi,

$$\frac{1}{1-2x^2+o(x^3)} = 1-\left(-2x^2+o(x^3)\right)+\left(-2x^2+o(x^3)\right)^2-\left(-2x^2+o(x^3)\right)^3+o(x^3),$$

ce qui donne, après développement et en ne gardant que les monômes de degrés inférieurs ou égals à 3 :

$$\frac{1}{1-2x^2+o(x^3)} = 1+2x^2+o(x^3).$$

on a, alors

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)}{1-2x^2+o(x^3)} &= \left(1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)\left(1+2x^2+o(x^3)\right) \\
&= 1+x+\frac{5}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3+o(x^3).
\end{aligned}
$$

USTHB

(b) **L'équation de la tangente à la courbe de f au point $(0, f(0))$:** De la question précédente, on déduit que la courbe représentative de f admet en 0 une tangente d'équation $y = e + ex$.

(c) **La position de la tangente par rapport à la courbe de f :** On a $f(x) - y \sim \frac{5e}{2}x^2$, alors $f(x) - y$ est positive au voisinage de 0. On déduit que, la courbe de f est au-dessus de sa tangent en 0.

(d) **Calculer la limite suivante :**

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - e}{x} \text{ est une forme indéterminée.}$$

Au voisinage de 0 on a : $f(x) - e = ex + o(x)$, donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - e}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{ex + o(x)}{x} = e.$$

USTHB