

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATRAPAGE

Exercice 1. (6 points) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + \ln(e + x^2)}.$$

1. **Dresser le tableau de variations de f .**

La fonction f est définie sur \mathbb{R} car $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + \ln(e + x^2) > 0$.

f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \frac{-2x}{(e+x^2)(1+\ln(e+x^2))^2}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

avec $f(0) = \frac{1}{2}$. De plus $f'(x)$ est du signe de $-2x$, c'est-à-dire

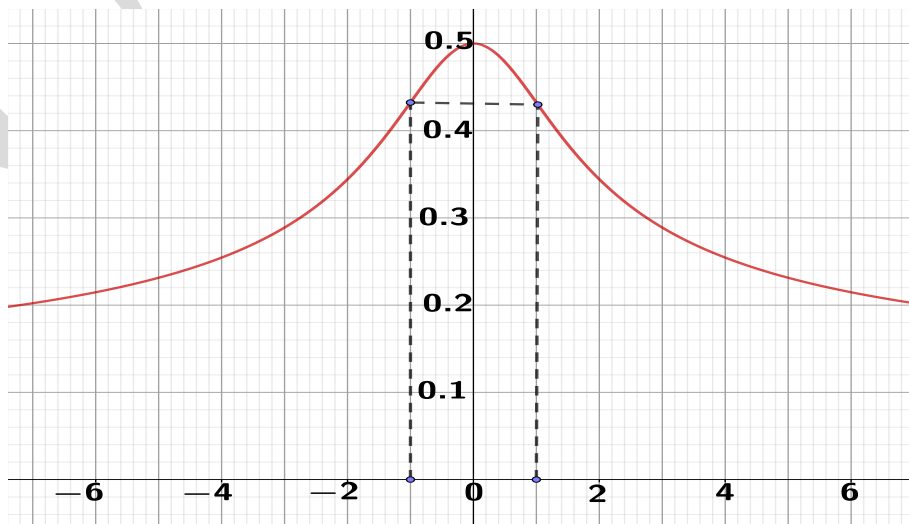
- $f'(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$,
- $f'(x) < 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \ln(e + x^2)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \ln(e + x^2)} = 0.$$

▷ **Le tableau de variations de f**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	0

▷ **La courbe représentative de f .**



2. Déterminer l'image directe $f(\{-1, 1\})$ et l'image réciproque $f^{-1}(\{-1\})$.

L'image directe. on a :

$$f(\{-1, 1\}) = \{f(x) \mid x \in \{-1, 1\}\}.$$

L'image de -1 et 1 par f est $f(-1) = f(1) = \frac{1}{1+\ln(e+1)}$. D'où,

$$f(\{-1, 1\}) = \left\{ \frac{1}{1+\ln(e+1)} \right\}.$$

L'image réciproque $f^{-1}(\{0\})$. On a :

$$f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{0\}\}.$$

On résout donc,

$$\begin{aligned} f(x) \in \{0\} &\Leftrightarrow f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1+\ln(e+x^2)} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

L'équation (1) n'admet pas de solution dans \mathbb{R} car $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$f^{-1}(\{0\}) = \emptyset.$$

3. Dédurre alors que f n'est ni injective ni surjective :

▷ f n'est pas injective car il existe deux réels x_1 et x_2 différents tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$, on prend $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$.

▷ f n'est pas surjective car il existe un réel y tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \neq f(x)$. Il suffit de prendre $y = 0$.

4. Déterminer un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée pour que f soit bijective.

Première méthode : A partir du tableau de variations de f , on déduit que :

▷ f est continue sur $[0, +\infty[$;

▷ f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$;

De plus, $f([0, +\infty[) =]0, 1/2]$.

D'après le Théorème de la bijection f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $]0, 1/2]$.

Remarque : f réalise aussi une bijection de $] -\infty, 0]$ dans $]0, 1/2]$.

Deuxième méthode : La fonction f est bijective si et seulement si pour tout $y \in F$ l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution $x \in E$.

Soit $y \in F$, alors

$$\begin{aligned}
 y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{1}{1 + \ln(e + x^2)} \\
 &\Leftrightarrow y \ln(e + x^2) + y = 1 \\
 &\Leftrightarrow \ln(e + x^2) = \frac{1 - y}{y} \\
 &\Leftrightarrow x^2 = e^{\frac{1-y}{y}} \\
 &\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{e^{\frac{1-y}{y}} - e}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

▷ Si $y \in]-\infty, 0] \cup]1/2, +\infty[$, l'équation (2) n'admet pas solution dans \mathbb{R} .

▷ Si $y \in]0, 1/2]$, l'équation (2) admet au moins une solution dans \mathbb{R} : $x_1 = \sqrt{e^{\frac{1-y}{y}} - e}$ et $x_2 = -\sqrt{e^{\frac{1-y}{y}} - e}$. De plus, on a : $x_1 \in [0, +\infty[$ et $x_2 \in]-\infty, 0]$.

Conclusion :

Si $E = [0, +\infty[$ (ou $E =]-\infty, 0]$) et $F =]0, 1/2]$ alors l'équation (2) admet une unique solution.

On déduit alors que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $]0, 1/2]$ (et de $]-\infty, 0]$ dans $]0, 1/2]$).

Déterminer l'expression de f^{-1} .

Soient $E = [0, +\infty[$ et $F =]0, 1/2]$, on a

$$y = f(x) \Rightarrow y = \frac{1}{1 + \ln(e + x^2)} \Rightarrow x = \sqrt{e^{\frac{1-y}{y}} - e}.$$

La fonction réciproque $f^{-1} :]0, 1/2] \rightarrow [0, +\infty[$ est donnée par :

$$f^{-1}(x) = \sqrt{e^{\frac{1-x}{x}} - e}.$$

Remarque : Si on considère $E =]-\infty, 0]$ et $F =]0, 1/2]$, on a

$$y = f(x) \Rightarrow y = \frac{1}{1 + \ln(e + x^2)} \Rightarrow x = -\sqrt{e^{\frac{1-y}{y}} - e}.$$

La fonction réciproque $f^{-1} :]0, 1/2] \rightarrow]-\infty, 0]$ est définie par :

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{e^{\frac{1-y}{y}} - e}.$$

Exercice 2. (8 points)

Soit

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

1. Montrer que g est prolongeable par continuité en $x = 0$.

La fonction g est prolongeable par continuité en $x = 0$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = l$.

La limite $g(x)$ quand x tend vers 0 ($\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1}$) est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Pour lever cette forme indéterminée, on utilise la règle de l'Hopital.

Soient

$$\begin{cases} f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1, \\ h(x) = e^x - 1 \Rightarrow h'(x) = e^x \end{cases}$$

D'où,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1.$$

Alors,

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1}, & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

2. Montrer que \tilde{g} est dérivable en $x = 0$.

\tilde{g} est dérivable en 0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(0)}{x} = c$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - e^x + 1}{x^2} \text{ est une forme indéterminée } \frac{0}{0}. \end{aligned}$$

On applique la règle de l'Hopital. Soient

$$\begin{cases} f(x) = x - e^x + 1 \Rightarrow f'(x) = 1 - e^x, \\ h(x) = x^2 \Rightarrow h'(x) = 2x \end{cases}$$

d'où,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{2x} \text{ est aussi une forme indéterminée } \frac{0}{0},$$

on applique une deuxième fois la règle de l'Hopital on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{2x} = \frac{-1}{2},$$

donc

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - e^x + 1}{x^2} = \frac{-1}{2}.$$

3. Calculer g' sur \mathbb{R} .

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}, & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 3. (7 points)

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ de la fonction f .

$$f(x) = x - x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}.$$

On pose d'abord le changement de variable $y = \frac{1}{x}$ où $y \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Alors, on a

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{y} - \frac{\sqrt{1+y}}{y} \\ &= \frac{1 - \sqrt{1+y}}{y}. \end{aligned}$$

Maintenant, on calcule le DL de la fonction f au voisinage de 0. On commence par le DL du numérateur à l'ordre 3 car on va diviser par y ,

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + o(y^3),$$

donc

$$1 - \sqrt{1+y} = \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + o(y^3).$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sqrt{1+y}}{y} &= \frac{\frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + o(y^3)}{y} \\ &= \frac{y \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}y + \frac{1}{16}y^2 + o(y^2) \right)}{y} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8}y + \frac{1}{16}y^2 + o(y^2). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + \frac{1}{16x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \text{ est une forme indéterminée } \infty \times 0.$$

Au voisinage de $+\infty$ on a : $x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = \frac{1}{2}.$$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction g .

$$g(x) = \frac{4\sin(x) - \arctan(x)}{\ln(1+x)}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ \arctan(x) &= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), \end{aligned}$$

alors,

$$4\sin(x) - \arctan(x) = 3x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

D'autre part, le DL de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 3 est donné par

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 \frac{4\sin(x) - \arctan(x)}{\ln(1+x)} &= \frac{3x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)} \\
 &= \frac{x(3 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2))}{x(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2))} \\
 &= \frac{3 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)}.
 \end{aligned}$$

Ensuite, on effectue la division suivant les puissances croissantes

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{rr}
 3 & -\frac{1}{3}x^2 \\
 -3 & +\frac{3}{2}x - x^2
 \end{array} & \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 \\ \hline 3 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{12}x^2 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{rr}
 & +\frac{3}{2}x - \frac{4}{3}x^2 \\
 & -\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}x^2 \\
 & \hline & -\frac{7}{12}x^2
 \end{array} &
 \end{array}$$

D'où, le DL de g au voisinage de 0 s'écrit comme suit :

$$\frac{4\sin(x) - \arctan(x)}{\ln(1+x)} = 3 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{12}x^2 + o(x^2).$$

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin(x) - \arctan(x)}{\ln(1+x)} \text{ est une forme indéterminée } \frac{0}{0}.$$

Au voisinage de 0 on a : $\frac{4\sin(x) - \arctan(x)}{\ln(1+x)} = 3 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{12}x^2 + o(x^2)$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin(x) - \arctan(x)}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{12}x^2 + o(x^2) \right) = 3.$$