Corrigé de l'épreuve finale

Exercice 1(6 points)

1. **Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est pair.**

Première méthode : Raisonnement directe **(1,5pt)**

- Si n est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$, d'où
  $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2(2k^2+k) = 2l$ avec $l = (2k^2+k) \in \mathbb{N}$ donc $n(n+1)$ est pair.
- Si n impair, alors il exist $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$, ce qui donne
  $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 4k^2+6k+2 = 2(2k^2+3k+1)$ qui est pair car c'est un multiple de 2.

Deuxième méthode : Raisonnement par récurrence

On pose $\mathcal{P}(n)$: $n(n+1)$ est pair. On montre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \mathcal{P}(n)$ est vraie.

- Pour $n = 0$, on a : $0 \cdot 1 = 0$ pair, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Supposons que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie c'est-à-dire $(n+1)(n+2)$ est pair.
  On a $(n+1)(n+2) = n(n+1) + 2(n+1)$, comme $n(n+1)$ est pair par hypothèse et $2(n+1)$ est pair (multiple de 2) alors $(n+1)(n+2)$ est pair, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

2. **Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x - E(x)}$. Déterminer $f([0,1[)$ et $f([1,2[)$, f est elle injective ?**

- $f([0,1[) = \{f(x) \in \mathbb{R} / x \in [0,1[\}$. Sur $[0,1[$, $E(x) = 0$, donc $f(x) = \sqrt{x}$ qui est continue et strictement croissante sur $[0,1[$ d'où $f([0,1[) = [f(0), f(1)[= [0,1[$. **(0,75 pt)**
- $f([1,2[) = \{f(x) \in \mathbb{R} / x \in [1,2[\}$. Sur $[1,2[$, $E(x) = 1$, donc $f(x) = \sqrt{x-1}$ qui est continue et strictement croissante sur $[1,2[$ d'où $f([1,2[) = [f(1), f(2)[= [0,1[$. **(0,75 pt)**
- On a $f([0,1[) = f([1,2[) = [0,1[$, donc on peut trouver x_1 et x_2 tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$ (par exemple $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ avec $f(0) = f(1) = 0$).
  On déduit alors que f n'est pas injective. **(0,5 pt)**

3. **Soit $A = \left\{ \sqrt{1+x^2} < x \ \ ou\, 1 - 2x^2 > x^2 \mid x \in [0,+\infty[\right\}$. Déterminer s'ils existent :** $\sup A$**,** $\max A$**,** $\min A$ **et** $\inf A$**.**

- Pour $x \in [0,+\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^2} < x \quad &\Rightarrow \quad 1 + x^2 < x^2 \\ &\Rightarrow \quad 1 < 0 \ \ \text{impossible} \\ &\Rightarrow \quad S_1 = \emptyset. \qquad\qquad \textbf{(0,5pt)} \end{aligned}$$

– Pour $1-2x^2 > x^2$ avec $x \in [0,+\infty[$, on a

$$\begin{aligned}
1-2x^2 > x^2 &\Rightarrow 1-3x^2 > 0 \\
&\Rightarrow x \in \left]\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[\text{ et } x \in [0,+\infty[\\
&\Rightarrow x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[= S_2 \qquad \textbf{(0,5pt)}
\end{aligned}$$

D'où l'ensemble $A = \left\{x \in S_1 \cup S_2\right\} = \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$. **(0,5pt)**
0 est un minorant de A et $0 \in A$ donc $\min A = \inf A = 0$. **(0,5pt)**
D'autre part $\frac{1}{\sqrt{3}}$ est un majorant de A et $\frac{1}{\sqrt{3}} \notin A$, alors $\sup A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\max A$ n'existe pas. **(0,5pt)**

Exercice 2(8 points)

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{|x-1|}\right)$$

1. **Donner le domaine de définition de f.**

La fonction f est la composée de $x \mapsto \arctan x$ qui est définie sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{1}{|x-1|}$ qui est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$, d'où f est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$. **(1pt)**

2. **Montrer que f est prolongeable par continuité en $x_0 = 1$, puis donner son prolongement.**

f est prolongeable par continuité en $x_0 = 1$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = l$, avec l fini.

Première méthode :

On a $\lim\limits_{x\to 1} \arctan\left(\frac{1}{|x-1|}\right) = \lim\limits_{y \to +\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$, avec $y = \frac{1}{|x-1|}$. Donc f est prolongeable par continuité en $x_0 = 1$. **(1,5pt)**

Deuxième méthode :

On pose

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right), & x > 1 \\ \arctan\left(\frac{1}{1-x}\right), & x < 1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \arctan\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

D'où $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = \frac{\pi}{2}$ Donc f est prolongeable par continuité en $x_0 = 1$.

Le prolongement $\tilde{f}$ est donné par $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq 1 \\ \frac{\pi}{2} & si \quad x = 1 \end{cases}$ **(0.5pt)**

3. **Soit** g **la fonction définie par :** $g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq 1 \\ \dfrac{\pi}{2} & si \quad x = 1 \end{cases}$

$a)$ **Montrer qu'il existe** $c \in]1, 2[$ **tel que** $g(2) - \frac{\pi}{2} = g'(c)$**.**

Il s'agit içi d'appliquer le théorème des accroissements finis à g sur $[1, 2]$ (voir le cours).

- La fonction g est continue en 1 puisque c'est la prolongée par continuité de f, de plus g est continue sur $]1, 2]$ car c'est la composée de $x \mapsto \arctan x$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ qui sont continues sur $]1, 2]$.
  Donc g est continue sur $[1, 2]$. **(1pt)**
- g est dérivable sur $]1, 2[$ car c'est la composée de $x \mapsto \arctan x$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ donc elle est dérivable sur $]1, 2[$. **(0,5pt)**

D'après le théorème des accroissements finis il existe alors un $c \in]1, 2[$ tel que

$$g(2) - g(1) = g(2) - \frac{\pi}{2} = g'(c). \qquad \textbf{(0,5pt)}$$

$b)$ **Montrer que** g **est bijective de** $]0, 1[$ **dans un intervalle** J **à déterminer, puis trouver l'application réciproque.**

Pour montrer que g réalise une bijection de $]0, 1[$ dans J à déterminer, on utilise le théorème de la bijection monotone, qui dit que si une fonction g définie sur I est continue et strictement monotone sur I alors g est une bijection de I dans $J = g(I)$.

- **Continuité de** g **:** On a sur $]0, 1[$, $g(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ qui est continue car c'est la composée de la fonction $x \mapsto \arctan x$ qui est continue sur sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ qui est continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$, donc g est continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et en particulier sur $]0, 1[$. **(0,5pt)**
- **Monotonie de** g **:** Pour les même raisons que précédemment g est dérivable sur $]0, 1[$ est sa dérivée est donnée par
$$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2 + 1} > 0, \qquad \forall x \in]0, 1[\qquad \textbf{(0,5pt)}$$
  donc g est strictement monotone sur $]0, 1[$, d'où d'après le théorème de la bijection g est bijective de $]0, 1[$ dans $J = g(]0, 1[)$. **(0,5pt)**
  Comme g est continue strictement croissante sur $]0, 1[$ alors
$$J = \left] g(0), \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) \right[= \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[. \qquad \textbf{(0,5pt)}$$

.

Application réciproque

La fonction g étant bijective de $]0, 1[\longrightarrow \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc elle admet une fonction réciproque $g^{-1} : \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow]0, 1[$.

On a pour tout $x \in]0,1[$, $y = g(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ et on a aussi par définition

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in]0,1[$$

d'où

$$\begin{aligned}
\tan y = \frac{1}{1-x} \quad &\Rightarrow \quad 1 - x = \frac{1}{\tan y} \\
&\Rightarrow \quad x = 1 - \frac{1}{\tan y} \\
&\Rightarrow \quad g^{-1}(y) = 1 - \frac{1}{\tan y}, \qquad \forall y \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[. \qquad \textbf{(1pt)}
\end{aligned}$$

Finalement la fonction réciproque g^{-1} est donnée par

$$\begin{aligned}
g^{-1} : \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\quad &\longrightarrow \quad]0,1[\\
x \quad &\longrightarrow \quad g^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{\tan x}
\end{aligned}$$

Exercice 3(6 points)

Soit

$$f(x) = \frac{e^{x-\cos x}}{\sqrt{1 - \ln(1+x)}}.$$

1. Le DL de la fonction f à l'ordre 2 au voisinage de 0.

On a $x - \cos x = -1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

Ce qui donne $e^{x+\cos x} = e^{-1} \cdot e^{x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}$. **(0,5pt)**

On pose $u = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ avec $u \to 0$ quand $x \to 0$, alors :

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2).$$

d'où,

$$e^{x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} = 1 + \left(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)^2 + o(x^2). \qquad \textbf{(0,5pt)}$$

On développe l'expression ci-dessus en ne gardant que les monômes de degré inférieur ou égal à 2, on obtient

$$e^{x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} = 1 + x + x^2 + o(x^2).$$

et

$$e^{x-\cos x} = e^{-1}\left(1 + x + x^2 + o(x^2)\right). \qquad \textbf{(0,5pt)}$$

Maintenant, on calcule le DL de $\sqrt{1 - \ln(1+x)} = \sqrt{1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}$.

On pose $t = -x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ avec $t \to 0$ quand $x \to 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-\ln(1+x)} &= \sqrt{1+t} \\
&= 1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o(x^2) \\
&= 1+\frac{1}{2}\left(-x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-\frac{1}{8}\left(-x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)^2+o(x^2) \qquad \textbf{(0,5pt)}
\end{aligned}$$

On développe l'expression en ne gardant que les monômes de degré inférieur ou égal à 2, on obtient

$$\sqrt{1-\ln(1+x)} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2). \qquad \textbf{(0,5pt)}$$

Alors,

$$f(x) = \frac{e^{-1}\left(1+x+x^2+o(x^2)\right)}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)}.$$

Pour calculer le DL du quotient $\dfrac{1+x+x^2+o(x^2)}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)}$, on peut appliquer l'une des méthodes suivantes :

Méthode 1 : On effectue la division suivant les puissances croissantes.

$$\begin{array}{cccc|l}
1 & +x & +x^2 & & 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2 \\ \cline{5-5}
-1 & +\frac{1}{2}x & -\frac{1}{8}x^2 & & 1+\frac{3}{2}x+\frac{13}{8}x^2 \\ \cline{1-4}
 & \frac{3}{2}x & +\frac{7}{8}x^2 & & \\
 & -\frac{3}{2}x & +\frac{3}{4}x^2 & -\frac{3}{16}x^3 & \\ \cline{1-4}
 & & \frac{13}{8}x^2 & -\frac{3}{16}x^3 &
\end{array}$$

d'où,

$$\frac{1+x+x^2+o(x^2)}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)} = 1+\frac{3}{2}x+\frac{13}{8}x^2+o(x^2). \qquad \textbf{(1,5pt)}$$

Au final, on obtient

$$f(x) = e^{-1}\left(1+\frac{3}{2}x+\frac{13}{8}x^2\right)+o(x^3) = \frac{1}{e}+\frac{3}{2e}x+\frac{13}{8e}x^2+o(x^3). \qquad \textbf{(0,5pt)}$$

Méthode 2 :

On a

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-1}\left(1+x+x^2+o(x^2)\right)}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)} &= \left(e^{-1}\left[1+x+x^2+o(x^2)\right]\right)\frac{1}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)} \\
&= \left(e^{-1}\left[1+x+x^2+o(x^2)\right]\right)\frac{1}{1+h}
\end{aligned}$$

avec $h=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$ tel que $h\to 0$ quand $x\to 0$. Le DL de $\frac{1}{1+h}$ à l'ordre 2 est donné par

$$\frac{1}{1+h} = 1-h+h^2+o(h^2).$$

Ainsi,

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)} = 1-\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2))\right)+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)^2+o(x^2).$$

Ce qui donne, après développement et en ne gardant que les monômes de degré inférieur ou égal à 2, le DL suivant :

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)} = 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2).$$

On a, alors

$$\begin{aligned}\frac{e^{-1}\left(1+x+x^2+o(x^2)\right)}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)} &= e^{-1}\left(1+x+x^2+o(x^2)\right)\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)\\ &= \frac{1}{e}+\frac{3}{2e}x+\frac{13}{8e}x^2+o(x^3).\end{aligned}$$

Méthode 3 :

On peut aussi mettre la fonction f sous la forme

$$\frac{e^{-1}\left(1+x+x^2+o(x^2)\right)}{\sqrt{1-x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}} = \left(e^{-1}\left[1+x+x^2+o(x^2)\right]\right)\frac{1}{\sqrt{1-x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}}$$

Il suffit d'utiliser le DL de $\frac{1}{\sqrt{1+y}}$ et déduire le DL final par le produit.

2. L'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point $(0, f(0))$:

De la question précédente, on déduit que (C_f) admet au point $(0, e)$ une tangente d'équation $y = \frac{1}{e}+\frac{3}{2e}x$. **(1pt)**

3. La position de la tangente par rapport à la courbe (C_f) : On a $f(x)-y \sim \frac{13}{8e}x^2$, alors $f(x)-y$ est positive au voisinage de 0. On déduit que, la courbe (C_f) est au-dessus de sa tangent en $(0, e)$. **(0,5pt)**