U.S.T.H.B
Faculté des Mathématiques
1ère année Lic ST
Sections (16-30)

Coordination SM-ST du module MATHS I
Année universitaire 2019-2020
Durée: 01 h 15 mn

Examen Final de Maths 1

L'effaceur, la calculatrice et le téléphone portable sont strictement interdits.

Exercice 1(6 points)

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est pair.

2. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x - E(x)}$. Déterminer $f([0,1[)$ et $f([1,2[)$, f est elle injective?

3. Soit $A = \left\{x \in [0, +\infty[, \quad \text{tel que} \quad \sqrt{1+x^2} < x \quad \text{ou} \quad 1 - 2x^2 > x^2\right\}$. Déterminer s'ils existent: $\sup A$, $\max A$, $\min A$ et $\inf A$.

Exercice 2(8 points)

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{|x-1|}\right)$$

1. Donner le domaine de définition de f.

2. Montrer que f est prolongeable par continuité en $x_0 = 1$, puis donner son prolongement.

3. Soit g la fonction définie par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq 1 \\ \frac{\pi}{2} & si \quad x = 1 \end{cases}$

   $a)$ Montrer qu'il existe $c \in]1, 2[$ tel que $g(2) - \frac{\pi}{2} = g'(c)$.
   $b)$ Montrer que g est bijective de $]0, 1[$ dans un intervalle J à déterminer, puis trouver l'application réciproque.

Remarque : $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

Exercice 3(6 points)

On considère la fonction f définie par:

$$f(x) = \frac{e^{x - \cos x}}{\sqrt{1 - \ln(1+x)}}.$$

1. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. En déduire l'équation de la tangente au point $(0, f(0))$ à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et donner sa position par rapport à $(\mathcal{C}_f)$.

On donne les développements limités au voisinage de 0 suivants.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + +o(x^2) \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2) \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$$