
La calculatrice, l'effaceur et le téléphone portable sont strictement interdits

Exercice 1 (6 points)

1. Résoudre dans son domaine de définition l'équation: $ch(\ln x) = \sqrt{5}$.
2. Montrer en utilisant la contraposée que:
Si $n^2 + 3$ n'est pas divisible par 4, alors l'entier n est pair.
3. Soit f une application définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Donner la négation de la proposition suivante:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Exercice 2 (3 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par: $f(x) = \frac{\sin(\pi x) + 1}{x^2 - 2x + 5}$.

1. Calculer la dérivée de la fonction f .
2. Montrer que l'équation

$$(x^2 - 2x + 5)(\pi \cos(\pi x)) - (2x - 2)(1 + \sin(\pi x)) = 0,$$

admet au moins une solution dans l'intervalle $]0, 2[$.

Exercice 3 (5 points)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par:

$$f(x) = \begin{cases} x(2 + \sin x) & \text{si } x < 0 \\ 2x + x^2 e^{\arctan x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur \mathbb{R} .
2. Calculer la dérivée de f .

Exercice 4 (6 points)

1. En utilisant les développements limités, calculer la limite suivante:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e^{chx}}{\cos x - chx}.$$

2. Déterminer le développement limité de la fonction $f(x) = \frac{\cos(x + x^2)}{1 + x + x^2}$, puis calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{\cos(x + x^2)}{1 + x + x^2} - e^{-x} \right) \right].$$

On donne les développements limités au voisinage de 0 suivants.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \quad chx = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$