Corrigé de l'épreuve de rattrapage

Exercice 1. (6 points)

1. **Résoudre dans son domaine de définition l'équation suivante :**

$$ch(ln(x)) = \sqrt{5}.$$

L'équation est définie pour $x \in]0, +\infty[$. **(0.5 pt)**

On a

$$\begin{aligned} ch(ln(x)) = \frac{e^{ln(x)} + e^{-ln(x)}}{2} = \sqrt{5} \quad &\Rightarrow \quad e^{ln(x)} + e^{ln(\frac{1}{x})} = 2\sqrt{5} \quad \textbf{(0.5 pt)} \\ &\Rightarrow \quad x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{5} \\ &\Rightarrow \quad x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0. \quad \textbf{(1 pt)} \end{aligned}$$

Le déscriminant de la dernière équation est $\Delta = 16$. **(0.5 pt)**

D'où, l'éqution admet deux racines réelles distinctes $x_1 = \sqrt{5} - 2$ et $x_2 = \sqrt{5} + 2$. Comme $x_1, x_2 \in]0, +\infty[$ alors l'ensemble de solutions est $E = \{\sqrt{5} - 2, \sqrt{5} + 2\}$. **(0.5 pt)**

2. **Montrer par contraposition la proposition suivante :**

$$\text{"}n^2 + 3 \text{ n'est pas divisible par } 4 \Rightarrow n \text{ est pair".}$$

La contraposée est

$$\text{"}n \text{ est impair} \Rightarrow n^2 + 3 \text{ est divisible par } 4\text{".} \quad \textbf{(1 pt)}$$

$$\begin{aligned} n \text{ est impair} \quad &\Rightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad n = 2k + 1 \\ &\Rightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \ n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &\Rightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \ n^2 + 3 = 4k^2 + 4k + 4 \\ &\Rightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \ n^2 + 3 = 4k' \quad \text{oú } k' = k^2 + k + 1 \\ &\Rightarrow \quad n^2 + 3 \text{ est divisible par } 4. \quad \textbf{(2 pts)} \end{aligned}$$

Exercice 2. (3 points)

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{sin(\pi x) + 1}{x^2 - 2x + 5}.$$

1. **Calculer la dérivée de f.**

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 2x + 5)\pi cos(\pi x) - 2(x - 1)(sin(\pi x) + 1)}{(x^2 - 2x + 5)^2}. \quad \textbf{(1 pt)}$$

2. **Montrer que l'équation admet au moins une solution sur $]0,2[$.**

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x + 5)\pi cos(\pi x) - 2(x-1)(sin(\pi x) + 1) = 0.$$

f est continue sur $[0,2]$ et dérivable $]0,2[$ **(0.5 pt)**. De plus, on a : $f(0) = f(2) = \frac{1}{5}$. **(0.5 pt)**
D'après le Théorème de Rolle, il existe $c \in]0,2[$ tel que $f'(c) = 0$. **(1 pt)**

Exercice 3. (5 points)

Soit la fonction f définie par

$$f(x) \begin{cases} x^2 e^{arctan(x)} + 2x, & x \geq 0\,; \\ x(2 + sin(x)), & x < 0. \end{cases}$$

1. **Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$**

   (a) Pour $x \in]0,+\infty[$, la fonction $f : x \mapsto x^2 e^{arctan(x)} + 2x$ est la somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, d'où, f est continue sur $]0,+\infty[$.
   Pour $x \in]-\infty,0[$, la fonction $f : x \mapsto x(2 + sin(x))$ est continue sur $\mathbb{R}$, d'où elle est continue sur $]-\infty,0[$. **(0.5 pt)**

   (b) **La continuité au point 0.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} x(sin(x) + 2) = 0. \quad \textbf{(0.5 pt)} \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} x^2 e^{arctan(x)} = 0. \quad \textbf{(0.5 pt)} \end{aligned}$$

   comme $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ alors la fonction f est continue en 0.

2. **Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$**

   (a) Pour $x \in]0,+\infty[$, la fonction $f : x \mapsto x^2 e^{arctan(x)} + 2x$ est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, d'où, f est dérivable sur $]0,+\infty[$.
   Pour $x \in]-\infty,0[$, la fonction $f : x \mapsto x(2 + sin(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, d'où elle est dérivable sur $]-\infty,0[$. **(0.5 pt)**

   (b) La dérivabilité de f au point $x = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{x(sin(x) + 2)}{x} = 2. \quad \textbf{(0.5 pt)} \\ \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 e^{arctan(x)} + 2x}{x} = 2. \quad \textbf{(0.5 pt)} \end{aligned}$$

   Donc f est dérivable en 0.

3. **Déterminer la dérivée de f.**

$$f'(x) \begin{cases} (2x + \frac{x^2}{1+x^2})e^{arctan(x)} + 2, & x \geq 0\,; \\ 2 + sin(x) + xcos(x), & x < 0. \end{cases} \quad \textbf{(2 pts)}$$

Exercice 4. (6 points)

1. **En utilisant les DL calculer la limite suivante :**

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{cos(x)} - e^{ch(x)}}{cos(x) - ch(x)} \text{ est une forme indéterminée } \frac{0}{0}.$$

On a :

$$\begin{aligned} cos(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2). \\ ch(x) &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} e^{cos(x)} &= e^{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} \\ &= e \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} \end{aligned}$$

posons le changement de variable : $t = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ avec $t \to 0$ quand $x \to 0$, ce qui donne

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$$

donc, on a

$$e^{cos(x)} = e(1 + (-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2))^2 + o(x^2))$$

on développe l'expression ci-dessus en ne gardant que les monômes de degré inférieurs ou égals 2, on obtient

$$e^{cos(x)} = e(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)). \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

On procéde de la même manière pour calculer le DL de $e^{ch(x)}$, on obtient :

$$e^{ch(x)} = e(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)). \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

D'où,

$$e^{cos(x)} - e^{ch(x)} = -ex^2 + o(x^2)).$$

D'autre part, on a :

$$cos(x) - ch(x) = -x^2 + o(x^2). \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{cos(x)} - e^{ch(x)}}{cos(x) - ch(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-ex^2 + o(x^2))}{-x^2 + o(x^2)} = e. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

2. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{cos(x^2+x)}{1+x+x^2} - e^{-x}\right) \text{ est une forme indéterminée } \frac{0}{0}.$$

On a :

$$cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

donc,

$$\begin{aligned} cos(x+x^2) &= 1-\frac{1}{2}(x+x^2)^2+o(x^2), \\ &= 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2). \quad \textbf{(1 pt)} \end{aligned}$$

Ensuite, pour calculer le DL du quotient $\frac{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{1+x+x^2}$, on effectue la division suivant les puissances croissantes, on obtient

$$\frac{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{1+x+x^2} = 1-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2). \quad \textbf{(1.5 pt)}$$

$$e^{-x} = 1-x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2). \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

D'où,

$$\frac{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{1+x+x^2} - e^{-x} = -x^2+o(x^2). \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{cos(x^2+x)}{1+x+x^2}-e^{-x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(-x^2+o(x^2)) = 0. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$