Master 1 : RE,CE & ER

Examen de Méthodes Numériques Appliquées & Optimisation

Exercice 1 : **(5pts)**

Résoudre à l'aide de la *méthode de Gauss-Seidel* le système suivant :

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases}$$

et cela pour une tolérance $\varepsilon = 10^{-5}$
avec $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ (vecteur de départ). (Utiliser 4 chiffres après la virgule).

Exercice 2 : **(7pts)**

1- On considère l'équation $f(x) = ln(x) - x + 2 = 0$. Approcher la racine à $\varepsilon = 10^{-4}$ près par la *méthode de Newton* en posant $x_0 = 3$ (utiliser 4 chiffres après la virgule). (4pts)
2- On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y) = y(t) + t \\ \quad y(0) = 1 \end{cases}$$

Soit à résoudre ce problème par la *méthode d'Euler* à $t = 0.3$, avec un pas $h = 0.1$.

a) Vérifier que la solution analytique est $y(t) = -1 - t + 2e^t$ (0.5pts)
b) Montrer que $y_{k+1} = y_k(1 + h) + ht_k$ (0.5pts)
c) Calculer la solution au point 0.3. (2pts)

Exercice 3: **(4pts)**

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x_1^2 + 3x_2^2$$

On cherche à minimiser f sur $\mathbb{R}^2$.

1- En partant du point $x_0 = (2,2)$, à quel point x_1 arrive-t-on si l'on applique une itération de *la méthode de gradient* ?

Exercice 4 : **(4pts)**

Soit le problème suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

1- Donner la forme générale d'un équation aux dérivée partielle (EDP) linéaire du 2ème ordre et le type du problème (1) (1pts).
2- Pour résoudre le problème (1), nous utilisons la *méthode des différences finies (MDF)* en prenant $\Delta x = h = \Delta y = 0.1$.

a) Tracer le problème (Maillage correspondant), dans le carré $[0 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq 3]$. (1pts)

b) Donner l'approximation numérique (expression discrète) du système (1). (2pts)

Examen de Méthodes Numériques Appliquées

&

Optimisation

(corrigé type)

Exercice 1 : **(5pts)**

Résolution à l'aide de la *méthode de Gauss-Seidel* du système suivant :

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases}; \quad \varepsilon = 10^{-5} \text{ et } \quad x^{(0)} = (0,0,0)^T$$

On a :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(4 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(2 + x_1^{(k+1)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(9 - 2x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}\right) \end{cases}$$ **(1pts)**

Itération (1) $(pour\ k = 0)$

En partant de $x^{(0)} = (0,0,0)^T$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{4}\left(4 - 2x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right) \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}\left(2 + x_1^{(1)}\right) \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{4}\left(9 - 2x_1^{(1)} - x_2^{(1)}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(4 - 2(0) - (0)) = 1 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(2 + 1) = 3/2 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{4}(9 - 2(1) - 3/2) = 11/8 \end{cases}$$

$$x^{(1)} = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{11}{8}\right)^T \cong (1, 1.5000, 1.3750)$$ **(1pts)**

Itération (2) $(pour\ k = 1)$

En partant de $x^{(1)} = (1, \frac{3}{2}, \frac{11}{8})^T$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{4}\left(4 - 2x_2^{(1)} - x_3^{(1)}\right) \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2}\left(2 + x_1^{(2)}\right) \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{4}\left(9 - 2x_1^{(2)} - x_2^{(2)}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{4}\left(4 - 2\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{11}{8}\right)\right) = \frac{-3}{32} \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{-3}{32}\right) = \frac{61}{64} \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{4}\left(9 - 2\left(\frac{-3}{32}\right) - \frac{61}{64}\right) = \frac{527}{256} \end{cases}$$

$$x^{(2)} = \left(\frac{-3}{32}, \frac{61}{64}, \frac{527}{256}\right)^T \cong (-0.0937, 0.9521, 2.0585)$$ **(1pts)**

Itération (3) $(pour\ k = 2)$

En partant de $x^{(2)} = (\frac{-3}{32}, \frac{61}{64}, \frac{527}{256})^T$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{4}\left(4 - 2x_2^{(2)} - x_3^{(2)}\right) \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2}\left(2 + x_1^{(3)}\right) \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{4}\left(9 - 2x_1^{(3)} - x_2^{(3)}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{4}\left(4 - 2\left(\frac{61}{64}\right) - \left(\frac{527}{256}\right)\right) = \frac{9}{1024} \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{9}{1024}\right) = \frac{2057}{2048} \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{4}\left(9 - 2\left(\frac{9}{1024}\right) - \left(\frac{2057}{2048}\right)\right) = \frac{16339}{8192} \end{cases}$$

$$x^{(3)} = \left(\frac{9}{1024}, \frac{2057}{2048}, \frac{16339}{8192}\right)^T \cong (0.0087, 1.0043, 1.9945)$$ **(1pts)**

La suite $x^{(3)}$ converge vers la solution du système $x = (0, 1, 2)$. **(1pts)**

Exercice 2 : **(7pts)**

1- Approche de la racine à $\varepsilon = 10^{-4}$ près par la *méthode de Newton* avec $x_0 = 3$.

$$\text{Algorithme de Newton} \begin{cases} x_0 = 3 \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \end{cases} \quad \textbf{(0.25pts)}$$

On a:

$$f(x) = ln(x) - x + 2 = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

Avec $f(x^{(k)}) = ln(x^{(k)}) - x^{(k)} + 2$ **(0.25pts)**

$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})} = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3.1479$ $\quad |x^{(1)} - x^{(0)}| = |3.1479 - 3| = 0.1479$ **(1pts)**

$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{f'(x^{(1)})} = 3.1479 - \frac{f(3.1479)}{f'(3.1479)} = 3.1462$ $\quad |x^{(2)} - x^{(1)}| = |3.1462 - 3.1479| = 0.0017$ **(1pts)**

$x^{(3)} = x^{(2)} - \frac{f(x^{(2)})}{f'(x^{(2)})} = 3.1462 - \frac{f(3.1462)}{f'(3.1462)} = 3.1462$ $\quad |x^{(2)} - x^{(1)}| = |3.1462 - 3.1462| = 0.0000$ **(1pts)**

Donc la solution approchée est $x^{(3)} = 3.1462$. **(0.5pts)**

2- On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y) = y(t) + t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) Vérification de la solution analytique: $y(t) = -1 - t + 2e^t$

On a : $y'(t) = -1 + 2e^t = y(t) + t$ **(0. 5pts)**

b) Méthode d'Euler s'écrit:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + hf(t_k, y_k) \\ &= y_k + h(t_k + y_k) \\ &= \boldsymbol{y_k(1+h) + ht_k} \end{aligned} \quad \textbf{(0. 5pts)}$$

c) Calcule de la solution au point 0.3.

On a $h = 0.1$, $y_0 = 1$ et $t_k = t_0 + kh$ et $\boldsymbol{y_{k+1} = 1.1y_k + 0.1t_k}$

Donc :

Pour $k = 0$, $y_1 = 1.1y_0 + 0.1t_0 = 1.1 \times (1) + 0.1(0) = 1.1$ **(0. 5pts)**

Pour $k = 1$, $y_2 = 1.1y_1 + 0.1t_1 = 1.1 \times (1.1) + 0.1(0.1) = 1.22$ **(0. 5pts)**

Pour $k = 2$, $y_3 = 1.1y_2 + 0.1t_2 = 1.1 \times (1.22) + 0.1(0.2) = 1.362$ **(0. 5pts)**

C'est à dire que l'approximation en $t = 0.3$ de $y(t)$, est $\boldsymbol{y_3 = 1.362}$ **(0. 5pts)**

Exercice 3: **(4pts)**

Méthode de gradient pour minimiser la fonction:

$$minf(x) = x_1^2 + 3x_2^2, \text{ point de départ } x_0 = (2,2)^T$$

Calcul de la première itération $x_1 = ?$

Etape1 : calcul de gradient

$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 6x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow c^{(0)} = \nabla f(2,2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ **(0. 5pts)**

Etape 2 : test d'arrêt

$\left\|c^{(0)}\right\| = \sqrt{4^2 + 12^2} \cong 12.65 \neq 0$ on continue **(0. 5pts)**

On pose $d_0 = -\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix}$ **(0. 5pts)**

Etape 3 :

Calcul de α qui minimise la $f(x_0 + \alpha d_0)$

On a :

$x_0 + \alpha d_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4\alpha \\ 2-12\alpha \end{pmatrix}$ **(0. 5pts)**

$f(\alpha) = f(x_0 + \alpha d_0) = f(2-4\alpha, 2-12\alpha) = (2-4\alpha)^2 + 3(2-12\alpha)^2$ **(0. 5pts)**

$$\Rightarrow f'(\alpha) = (-4)2(2-4\alpha) + 3(-12)2(2-12\alpha) = 23 \times (28\alpha - 5)$$

D'où $f'(\alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{5}{28}$ **(0. 5pts)**

On a :

$$x_1 = x_0 + \alpha d_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{28}\begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/7 \\ -1/7 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$x_1 = (1.2857, -01428)$$ **(1pts)**

Exercice 4 : **(4pts)**

Soit le problème suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

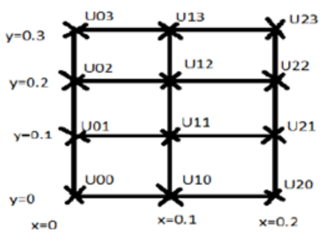
1- La forme générale d'une équation aux dérivée partielle (EDP) linéaire du 2ème ordre est :

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0$$ (0.5pts)

le type du problème (1) est un problème Elliptique ($car\ \Delta = -4 < 0$) (0.5pts)

2- Pour On a : $\Delta x = h = \Delta y = 0.1$.

a) Traçage du problème (ou Maillage correspondant) dans le carré [0 ≤ x ≤ 2 et 0 ≤ y ≤ 3]:



(1pts)

b) L'approximation numérique (expression discrète) du système (1). (2pts)

On a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}$$ (0.75pts) et $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2}$$ (0.75pts)

Donc l'approximation de problème (1) est :

$$4U_{i,j} = U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}$$ (0.5pts)