Université A.M.O de Bouira 2018/2019

Faculté des Sciences. Dépt. S.T. Durée: 1h30

Rattrapage de Maths I

Question de cours (04pts) :

Rappeler la définition de la fonction $x \to \arctan x$, en précisant son domaine de définition et son image. Quel est son sens de variation? Quels sont ses domaines de continuité et de dérivabilité? Quelle est sa dérivée?

Exercice 1 (10pts) :

I. Montrer par contraposition que : $x \neq \frac{1}{2}$ et $y \neq 4 \Longrightarrow -8x - y + 2xy + 2 \neq -2$

II. Soient f et g deux applications définies sur $\mathbb{R}$ comme suit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad et \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to 3x^2 - 5x \qquad\qquad x \to 3x - 2.$$

1. Calculer $f([-1,1])$, $f\left(\left\{0, \frac{5}{3}\right\}\right)$, $f^{-1}(-3)$.
2. f est elle injective, surjective ? est elle bijective?
3. Etudiez la bijection de l'application g.
4. Préciser $f \circ g$.

III. On définit sur $\mathbb{R}^*$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \qquad x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y(x^2 + 1) = x(y^2 + 1).$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation équivalence sur $\mathbb{R}^*$.

b) Déterminer la classe d'équivalence de 1 et 2.

Exercice 2 (03 pts) :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie par :

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x & si\ x \leq 0 \\ e^x + b & si\ x > 0 \end{cases}$$

Quelle condition doivent satisfaite a et b pour que f soit continue en 0 ?

Exercice 3 (03pts) :

Soit la fonction f définie par $f(x) = ln(1 + \sin x)$

1. Ecrire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f.
2. Calculer la limite suivante: $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \sin x)^{1/x}$

Indication

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$.

$\boxed{\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2}} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

Bon courage

Corrigé ex

Question de cours :

1- . Toute fonction est une application → F (0,5)

. Une fonction peut être continue mais non dérivable → V (0,5)

. Si une fonction est deux fois dérivable en un point est C^2 → F (0,5)

. Le D.L d'une fonction paire comprend ..... impaires → F (0,5)

2- Le théorème des accroissements finis :

soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ alors $\exists c \in]a,b[$ tq $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$ (1)

3- On a $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est le nombre dérivé. Si f est dérivable en x_0 alors (1)

soit C la courbe de f. C admet une tangente en $(x_0, f(x_0))$ de pente $f'(x_0)$ et l'équation de cette tangente est : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ (1)

4- La contraposée est : $x+y=xy+1 \Rightarrow x=1$ et $y=1$.

Exo1 :

I. Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$: 4^n+6n-1 est divisible

il s'agit de montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, \exists k\in\mathbb{N}$: $4^n+6n-1=9k$.

. Pour $n=0$, on a :

(0,5) $4^0+6\cdot 0-1=0\cdot 9=0$ → est vraie

donc $\exists k=0\in\mathbb{N}$: $4^0+6\times 0-1=9\cdot k$

. On suppose que P_n est vraie : $\forall n\in\mathbb{N}$: $\exists k\in\mathbb{N} / 4^n+6n-1=9k$

et on montre que $P(n+1)$ est vraie i.e : $\exists k'\in\mathbb{N} / 4^{n+1}+6(n+1)-1=$

On a :

$$\begin{aligned}4^{n+1}+6(n+1)-1 &= 4\,4^n+6n+5 \\ &= 4(9k-6n+1)+6n+5 \\ &= 36k-18n+9 \\ &= 9k' \text{ avec } (k'=4k-2n+1)\in\mathbb{N} \Rightarrow P(n+1)\end{aligned}$$

(1,5)

Finalement $\forall n\in\mathbb{N}$: 4^n+6n-1 est divisible par 9.

$f(x)=x^2-1$

$g : [0,1] \to [-1,0]$

$f^{-1}(]-\frac{1}{2},0[) = \{x \in [0,1] \text{ tq } \exists y \in]-\frac{1}{2},0[\text{ et } y = f(x)\}$

On a $-\frac{1}{2} < y < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < f(x) = x^2 - 1 < 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < x^2 < 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1$

$\Rightarrow f^{-1}(]-\frac{1}{2},0[) =]\frac{1}{\sqrt{2}},1[$ 0,5

$\cdot f(]0,\frac{1}{2}[) = \{y \in [-1,0] \,/\, \exists x \in]0,\frac{1}{2}[\text{ et } y = f(x)\}.$

On a $0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < x^2 < \frac{1}{4}$

$\Rightarrow -1 < x^2 - 1 < -\frac{3}{4} \Rightarrow -1 < f(x) = y < -\frac{3}{4}$

$\Rightarrow f(]0,\frac{1}{2}[) =]-1,-\frac{3}{4}[$ 0,5

2 - Montrons que f est bijective

- f est injective $\Leftrightarrow \forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ 1

On a $f(x) = f(x') \Rightarrow x^2 - 1 = x'^2 - 1$

$\Rightarrow x^2 = x'^2 \Rightarrow x = x'$ Comme $x, x' \in [0,1]$

$\Rightarrow x > 0, x' > 0$

alors f est injective

- f est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in [-1,0], \exists x \in [0,1] \,/\, f(x) = y$

$y = f(x) \Rightarrow x^2 - 1 = y \Rightarrow x^2 = y + 1 \Rightarrow x = \sqrt{y+1}$

donc $\forall y \in [-1,0]$, $\exists x = \sqrt{y+1} \in [0,1]$ tq $f(x) = y$ 1

$\Rightarrow$ f est surjective

f est injective et surjective donc elle est bijective 0,5

donc est inversible et $f^{-1} : F \longrightarrow E$

$x \longmapsto \sqrt{x+1}$ 0,5

<u>Exo 2</u> :

$f(x) = \frac{1}{x^2-4}$, $g(x) = x^3 + 3x^2 + 5$, $h(x) = \sqrt{4-2x}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2,-2\}$ 0,5 , $D_g = \mathbb{R}$ 0,5 , $D_h =]-\infty, 2]$ 0,5 $(x \leq 2)$

$\cdot D_f \cup D_h =]-\infty,-2[\cup]-2,2[\cup]2,+\infty[\cup]-\infty,2]$

$= \mathbb{R}$ 0,5

$\cdot C_{D_g}^{D_f} = \{x \in D_g \,/\, x \notin D_f\} = \{2,-2\}$ 0,5 , $D_g / D_h =]2,+\infty[$ 0,5

b/ $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + b & \text{si } x < 2 \\ a & x = 2 \\ bx^2 + 2x + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ est continue

f est continue en x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

- Sur $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$ les fonctions $x^2 + x + b$ et $bx^2 + 2x + 5$ sont des polynomes donc continues sur ces deux intervalles
- La continuité en $x_0 = 2$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = f(2) = a.$$

- $\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} x^2 + x + b = b + 6 = a$ (0,5)

- $\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} bx^2 + 2x + 5 = 4b + 9 = a$ (0,5)

- $\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = a$ (0,5) (0,5)

d'où $\begin{cases} 6 + b = a \\ 4b + 9 = a \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 5}$ et $\boxed{b = -1}$

Exo3

1- Le $DL_3(0)$ de $x\ln(\cos x)$ et $\sqrt{1+x} - e^{\sin x}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

(1)

(0,5)

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$ (1)

$$\Rightarrow \sqrt{1+x} - e^{\sin x} = -\frac{x^3}{8} + o(x^3)$$ (0,5)

et $x\ln(\cos x) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$ (1)

2- $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{-\frac{x^3}{2}}{-\frac{x^3}{8}} = \frac{8}{2} = 4$