

Epreuve du 1^{er} semestre
Module: Mathématiques 01

Exercice 01 (5pts)

Soit U l'application de \mathbb{R} dans $] -2, +\infty [$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, U(x) = e^x - 2$

1. Déterminer $U^{-1}(\{0\})$ et $U([0, \ln 2])$.
2. Montrer que l'application U est bijective et déterminer U^{-1}

Exercice 02 (5pts)

Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{a} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\sin ax}{x} + (x-a)[x] - \sqrt{x} & \text{si } 0 < x \leq a \end{cases}$$

 $[x]$ est la partie entière de x , et a un réel positif ($a > 0$).

1. Déterminer la valeur de a pour que f soit continue sur son domaine de définition D_f .
2. Pour la valeur de a trouvée dans (1). Montrer qu'il existe au moins un réel $c \in]0, a[$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice 03 (6pts)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln(\cosh x)}{x \ln(1+x)}$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f
2. Dédire les valeurs $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), f'(0), f''(0)$.
3. Etudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0

Ind:
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$
$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Exercice 04 (4pts)

On considère sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ la loi de composition interne $*$ définie par
Pour tout $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, a * b = a + b + ab$

1. Montrer que $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$ est un groupe.
2. Le groupe $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$ est-il abélien?

