Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem 2019/2020
Faculté des Sciences et de la Technologie 1ère année L.M.D S.T
Tronc Commun des Sciences Techniques Durée: 1h30 mn

E. F. S de Maths1

Exercice1:(4,5 pts)
Soit f une application définie par:

$$f : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$$

$$x \mapsto f(x) = 1 + x^2$$

(1) f est-elle injective?
(2) Montrer que f est surjective.
(3) Déterminer les deux ensembles suivants: $f([-1,0])$ et $f^{-1}(]2,5[)$.

Exercice2:(4 pts)
En utilisant le Théorème des accroissements finis, démontrer que:

$$\forall\, x > 0 : \quad \frac{x}{1+x^2} < Arctg x < x$$

Exercice3:(6 pts)
(1) Montrer que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) \text{ au voisinage de } 0.$$

(2) Déterminer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 pour chacune des deux fonctions réelles de la variable réelle suivantes:

(i) $x \mapsto x \sin^2 x$ et **(ii)** $x \mapsto \ln(1 + \sin x)$

(3) En déduire les deux limites suivantes:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos x - \sin x}{x \sin^2 x}$ et **(b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1+\sin x)}{x - \sin x}$

Exercice4:(5,5 pts)
Soit l'application

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y, z, t) \mapsto f(x, y, z, t) = x - 2y + t$$

(1) Montrer que f est linéaire.
(2) Déterminer $\ker f$. En déduire $\operatorname{Im} f$.
(3) L'application f est-elle injective? surjective?

19 جانفي 2020

Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem 2019/2020
Faculté des Sciences et de la Technologie $1^{ère}$ année L.M.D S.T
Tronc Commun des Sciences Techniques Module: Maths1

Corrigé de l'examen

Exercice1:(4, 5 pts)

1) f n'est pas injective car il existe $(-1), 1 \in \mathbb{R}$ tels que $f(-1) = f(1)$ et
(0.25p) (0.25p) (0.25p)
$-1 \neq 1$. **(0.25p)**

2) Montrons que f est surjective.
Soit $y \in [1, +\infty[$. **(0.25p)**

$$y = f(x) \Rightarrow x^2 = y - 1 \text{ (0.25p)}$$

$$\Rightarrow |x| = \sqrt{y-1} \text{ (0.25p)}$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y-1} \text{ (0.25p)}$$

Ainsi $\forall y \in [1, +\infty[: \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)$. **(0.25p)**

3) • $f([-1,0]) = \{f(x) \ / \ x \in [-1, \cancel{1}]\}$ **(0.25p)**

$$= \{f(x) \ / \ 0 \leq x^2 \leq 1\} \text{ (0.25p)}$$

$$= \{f(x) \ / \ 1 \leq 1 + x^2 \leq 2\} = [1, 2].$$
(0.25p) (0.25p)

• $f^{-1}(]2, 5[) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) \in]2, 5[\}$ **(0.25p)**

$$= \{x \in \mathbb{R} \ / \ 1 < x^2 < 4\} \text{ (0.25p)}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \ / \ (x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[) \wedge x \in]-2, 2[\}$$
(0.25p) (0.25p)

$$=]-2, -1[\cup]1, 2[. \text{ (0.25p)}$$

Exercice2:(4 pts)

On applique le Théorème des accroissements finis pour la fonction:
$f : t \longmapsto f(t) = Arctgt$ sur l'intervalle $[0, x]$ avec $x > 0$.
(0.25p) (0.25p) (0.25p)
La fonction f est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$. Alors
(0.25p) (0.25p)

$$\exists c \in]0, x[: f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0)$$

(0.25p) (0.25p) (0.25p) (0.25p)

D'où $\exists c \in]0, x[: \; Arctgx = \dfrac{x}{1+c^2}$

(0.25p) (0.25p)

D'autre part, $0 < c < x \Rightarrow 0 < c^2 < x^2$ (0.25p)

$$\Rightarrow 1 < 1+c^2 < 1+x^2 \quad (0.25p)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1 \quad (0.25p)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+c^2} < x \quad (\text{car } x > 0) \quad (0.25p)$$

Ainsi $\forall x > 0 : \; \dfrac{x}{1+x^2} < Arctgx < x$ **(0.25p)**

Exercice3:(6 pts)

1) On a $\forall x \in]-1, +\infty[: (\ln(1+x))' = \dfrac{1}{1+x}$ **(0.25p)**

et $\dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$ au voisinage de 0. **(0.25p)**

D'où $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ au voisinage de 0. **(0.25p)**

2) (i) On a $\sin x = x + o(x^2)$ au voisinage de 0. **(0.25p)**

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= (x + o(x^2))(x + o(x^2)) \quad \textbf{(0.25p)} \\ &= x^2 + o(x^2) \text{ au voisinage de 0. } \textbf{(0.25p)} \end{aligned}$$

D'où $x\sin^2 x = x\left(x^2+o\left(x^2\right)\right) = x^3+o\left(x^3\right)$ au voisinage de 0. **(0.25p)**

(ii) On a $\quad \ln(1+\sin x) = \ln(1+u)$ avec $u = x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$ **(0.25p)**

$$= u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+o\left(u^3\right) \ \textbf{(0.25p)}$$

$$u = x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right) \Rightarrow u^2 = \left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right) = x^2+o\left(x^3\right) \ \textbf{(0.25p)}$$

$$\Rightarrow u^3 = \left(x^2+o\left(x^3\right)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right) = x^3+o\left(x^3\right) \ \textbf{(0.25p)}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \ln(1+\sin x) &= x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right) \ \textbf{(0.25p)} \\ &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right) \text{ au voisinage de 0. } \textbf{(0.25p)} \end{aligned}$$

$$\textbf{3)(a)} \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)}^{\textbf{(0.25p)}}-\overbrace{\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)}^{\textbf{(0.25p)}}}{\underbrace{x^3+o\left(x^3\right)}_{\textbf{(0.25p)}}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\frac{-x^3}{3}+o\left(x^3\right)}^{\textbf{(0.25p)}}}{x^3+o\left(x^3\right)} = -\frac{1}{3}\textbf{(0.25p)}$$

$$\textbf{(b)} \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1+\sin x)}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)}^{\textbf{(0.25p)}}-\overbrace{\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)}^{\textbf{(0.25p)}}}{\underbrace{x-\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)}_{\textbf{(0.25p)}}}$$

19 جانفي 2020

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = 1 \quad \textbf{(0.25p)}$$

(0.25p) (0.25p)

Exercice4:(5,5 pts)

1) Soient $(x_1,y_1,z_1,t_1),(x_2,y_2,z_2,t_2)\in\mathbb{R}^4$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. **(0.25p)**

$$\begin{aligned} f(\alpha\bullet(x_1,y_1,z_1,t_1)+\beta\bullet(x_2,y_2,z_2,t_2)) &= f(\alpha x_1+\beta x_2,\alpha y_1+\beta y_2,\alpha z_1+\beta z_2,\alpha t_1+\beta t_2) \ \textbf{(0.25p)} \\ &= (\alpha x_1+\beta x_2)-2(\alpha y_1+\beta y_2)+(\alpha t_1+\beta t_2) \ \textbf{(0.25p)} \\ &= \alpha(x_1-2y_1+t_1)+\beta(x_2-2y_2+t_2) \ \textbf{(0.25p)} \\ &= \alpha f(x_1,y_1,z_1,t_1)+\beta f(x_2,y_2,z_2,t_2) \ \textbf{(0.25p)} \end{aligned}$$

Ainsi f est linéaire.

2)
$$\begin{aligned} \ker f &= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ / \ f(x,y,z,t)=0\} \ \textbf{(0.25p)} \\ &= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ / \ x=2y-t\} \\ &= \{(2y-t,y,z,t) \ / \ (y,z,t)\in\mathbb{R}^3\} \ \textbf{(0.25p)} \\ &= \{y\bullet(2,1,0,0)+z\bullet(0,0,1,0)+t\bullet(-1,0,0,1) \ / \ (y,z,t)\in\mathbb{R}^3\} \\ &= Vect\{(2,1,0,0),(0,0,1,0),(-1,0,0,1)\} \ \textbf{(0.25p)} \end{aligned}$$

Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$.

$$\lambda_1\bullet(2,1,0,0)+\lambda_2\bullet(0,0,1,0)+\lambda_3\bullet(-1,0,0,1)=0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1-\lambda_3=0 \\ \lambda_1=0 \\ \lambda_2=0 \\ \lambda_3=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0 \ \textbf{(0.25p)}$$

Donc $\{(2,1,0,0),(0,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$ est libre **(0.25p)** et par suite c'est une base de $\ker f$ **(0.25p)** et $\dim(\ker f)=3$. **(0.25p)**

On a $\dim(\mathbb{R}^4)=\dim(\ker f)+\dim(\mathrm{Im} f)$. **(0.25p)**

D'où $\dim(\mathrm{Im} f)=\dim(\mathbb{R}^4)-\dim(\ker f)=4-3=1$.
(0.25p) **(0.25p)**

Comme $\mathrm{Im} f\subset\mathbb{R}$ et $\dim(\mathrm{Im} f)=\dim(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Im} f=\mathbb{R}$.
(0.25p) **(0.25p)** **(0.25p)**

3) Comme $\ker f\neq\{0_{\mathbb{R}^4}\}$ **(0.25p)**, alors f n'est pas injective. **(0.25p)**

Comme $\mathrm{Im} f=\mathbb{R}$ **(0.25p)**, alors f est surjective. **(0.25p)**