Université de Béjaia Février 2020
Département d'Informatique
$2^{ème}$ année LMD Logique

Interrogation

Exercice 1. (08 pts)
Montrer que :

1. p implique logiquement p
2. p implique logiquement $(p \Rightarrow p)$
3. $\models (q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
4. $(\overline{(p \vee \overline{q}}) \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \vee r)$
5. $\wedge$ est commutatif.
6. La formule $\alpha \equiv (x_1 \wedge \overline{x_1}) \Rightarrow x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots x_n,\ \ n > 2$ est une tautologie.

Corrigé de l'interrogation

1. p implique logiquement p.

p	$p \Rightarrow p$
1	1
0	1

on a $\models (p \Rightarrow p)$ donc p implique logiquement p.

2. p implique logiquement $(p \Rightarrow p)$.

p	$p \Rightarrow p$	$p \Rightarrow (p \Rightarrow p)$
1	1	1
0	1	1

On a $\models p \Rightarrow (p \Rightarrow p)$, alors p implique logiquement $p \Rightarrow p$.

3. $\alpha \equiv (q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

q	r	p	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	α
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

On a α est vraie sur toutes les lignes de sa table de vérité

$\models \alpha$.

4.

p	q	r	$\bar{q}$	$p \vee \bar{q}$	$\overline{p \vee \bar{q}}$	$q \Rightarrow r$	α_1	$p \vee r$	α_2
1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	0	1

avec $\alpha_1 \equiv (\overline{p \vee \bar{q}}) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

et $\alpha_2 \equiv q \Rightarrow (p \vee r)$.

d'après la table de vérité, on a $v(\alpha_1) = v(\alpha_2)$ sur toutes les lignes de la table de vérité.

donc $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ ou $[(\overline{p \vee \bar{q}}) \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \vee r)]$

5.

x	y	$x \wedge y$	$y \wedge x$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

d'après cette table de vérité, on $x \wedge y \equiv y \wedge x$ donc $\wedge$ est commutatif

6. $\alpha \equiv x_1 \wedge \bar{x}_1 \Rightarrow x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots x_n, \ n > 2.$

x_1	$\bar{x}_1$	$x_1 \wedge \bar{x}_1$
1	0	0
0	1	0

d'après la table de vérité la formule $\sigma \equiv x_1 \wedge \bar{x}_1$ est une formule insatisfiable.

Montrons que $\sigma \Rightarrow \beta$ est une tautologie pour toute formule B. y compris $(\beta \equiv x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots x_n, \ n > 2)$.

procédons par absurde.

supposons $\exists$ ligne où $v(\sigma \Rightarrow \beta) = 0$.

donc $\exists$ ligne où $v(\sigma) = 1$ et $v(\beta) = 0$ ... (1)

et nous avons σ est insatisfiable.

donc $\forall$ ligne de la table $v(\sigma) = 0$.

donc $\nexists$ ligne de la table $v(\sigma) = 1$ ... (2)

contradiction. alors $\sigma \Rightarrow B$ est une tautologie.

d'où α est une tautologie.