Université de Béjaia
Département d'Informatique
$2^{ème}$ année LMD

Février 2020

Logique

Interrogation

Exercice 1. (08 pts)

1. On dit qu'un ensemble Γ de formules du calcul propositionnel est indépendant si et seulement si, pour toute formule $\alpha \in \Gamma$, α n'est pas consequence logique de $\Gamma - \{\alpha\}$. Les ensembles suivants sont-ils indépendants ? $\Gamma_1 = \{(a \Rightarrow b), (b \Rightarrow c), (c \Rightarrow a)\}$; $\Gamma_2 = \{(a \Rightarrow b), (b \Rightarrow c), (a \Rightarrow c)\}$
2. On considère les énoncés suivants :
   (a) Si Brahim rate son examen alors il sera déprimé.
   (b) S'il fait beau alors Brahim ira à la piscine.
   (c) A la piscine, Brahim ne travaille pas.
   (d) Si Brahim ne va pas à la piscine alors il sera déprimé.
   (e) Brahim ratera son examen s'il ne travaille pas.

   Formalisez le problème en logique propositionnelle, avec : R : " Brahim rate son examen ", B : " Il fait beau ",P : "Brahim ira à la piscine ",T : " Brahim travaille ", D : " Brahim déprime ".
   On suppose que toutes ces déclarations sont vraies, est ce que la proposition " Brahim déprime" est vraie.

Corrigé de l'interrogation

1) $\Gamma_1 = \{(a \Rightarrow b), (b \Rightarrow c), (c \Rightarrow a)\}$

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow c$	$c \Rightarrow a$	$a \Rightarrow c$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1

On a :
- $a \Rightarrow b, b \Rightarrow c \not\models c \Rightarrow a$ car $\exists$ ligne où $v(a \Rightarrow b) = v(b \Rightarrow c) = 0$ et $v(c \Rightarrow a) = 1$ (voir ligne 5)
- $a \Rightarrow b, c \Rightarrow a \not\models b \Rightarrow c$ car $\exists$ ligne où $v(a \Rightarrow b) = v(c \Rightarrow a)$ et $v(b \Rightarrow c) = 0$ (voir ligne 2).
- $b \Rightarrow c, c \Rightarrow a \not\models a \Rightarrow b$ car $\exists$ ligne où $v(b \Rightarrow c) = v(c \Rightarrow a) = 1$ et $v(a \Rightarrow b) = 0$ (voir ligne 3).

donc Γ_1 est un ensemble indépendant.

$\Gamma_2 = \{(a \Rightarrow b), (b \Rightarrow c), (a \Rightarrow c)\}$

On a : • $a \Rightarrow b, b \Rightarrow c \models a \Rightarrow c$. car $\nexists$ ligne où $v(a \Rightarrow b) = 1$ et $v(b \Rightarrow c) = 1$ mais $v(a \Rightarrow c) = 0$

donc Γ_2 n'est pas indépendant.

(a) $\alpha \equiv R \Rightarrow D$

(b) $\beta \equiv B \Rightarrow P$

(c) $\gamma \equiv P \Rightarrow \bar{T}$

(d) $\sigma \equiv \bar{P} \Rightarrow D$

(e) $\theta \equiv \bar{T} \Rightarrow R$

En supposant que toutes ces déclarations sont vraies. on aura :

$v(\alpha) = v(\beta) = v(\gamma) = v(\sigma) = v(\theta) = 1$.

alors $v(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \wedge \sigma \wedge \theta) = 1$.

donc $v[(\ldots) \wedge (\bar{R} \vee D) \wedge (\bar{P} \vee \bar{T}) \wedge (P \vee D) \wedge (T \vee R)] = 1$

(on peut faire une table de vérité)

On peut procéder par absurde.

supposons que $v(D)=0$. alors.

$v(\bar{R}) = 1$ (car $v(\alpha)=1$). d'où $v(R)=0$.

donc $v(T)=1$ (car $v(\sigma)=1$) d'où $v(\bar{T})=0$.

donc $v(\bar{P})=1$ (car $v(\gamma)=1$) d'où $v(P)=0$.

alors on aura $v(P \vee D)=0$ contradiction avec $v(P \vee D)=1$.

donc forcement $v(D)=1$.