Module TS (Théorie de Signal)

<u>Contenu de Module</u>

Chap1 : Signaux, Fonctions et Opérateurs de base.

Chap2 : Classification des Signaux.

Chap3 : Séries et Transformée de Fourier.

Chap4 : Convolution et Corrélation.

Chap5 : Analyse Spectrale

Chap6 : Echantillonnage.

Chap7: Signaux Aléatoires.

Chap8 : Filtrage.

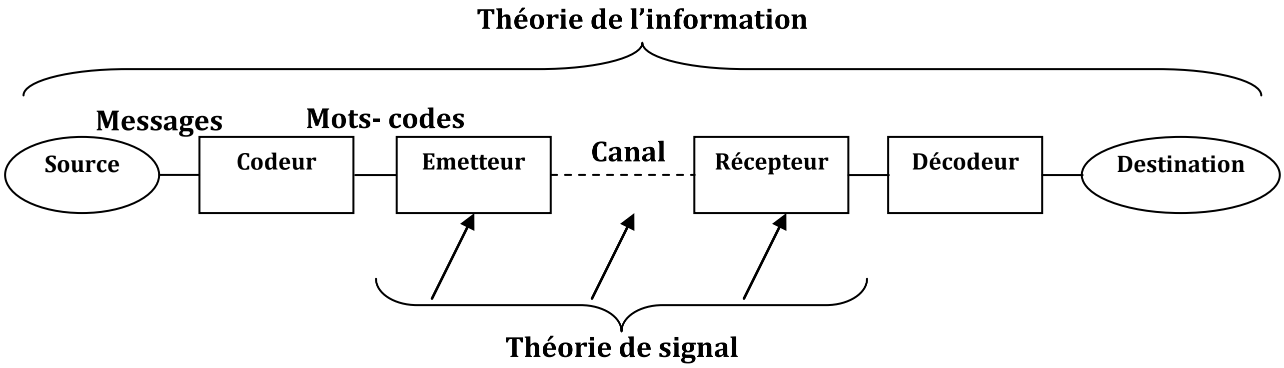
Chap9 : Transformées de Fourier Discrète et Rapide

Chap10 : Modulation et Démodulation des Signaux

Généralités

Définitions

- Signal : le signal est la représentation physique d'un phénomène qui évolue dans le temps ou dans l'espace.
- Signal : vient du latin signe ; variation dune grandeur physique de nature quelconque porteuse d'information.
- Théorie du signal : est l'ensemble des outilles mathématiques qui permettent de décrire les signaux émis par une source, ou modifies par un système de traitement.
- Théorie de l'information : est l'ensemble des outils mathématiques qui permet de décrire la transmission de messages véhiculés d'une source vers un destinataire.
- Traitement du signal : est l'ensemble des méthodes et des algorithmes qui permet d'élaborer ou d'interpréter les signaux porteurs d'information. Plus précisément :
  - élaboration : codage, modulation, changement de fréquence.
  - interprétation : décodage, démodulation, filtrage, détection, identification, etc……… ;
  - échantillonnage : représentation en temps discret.
  - numérisation : par conversion A/N.



On s'intéresse à la Théorie du signal

Cette discipline donne une description mathématique des signaux. Cette théorie fait appel à l'algèbre linéaire, l'analyse fonctionnelle, l'électricité et l'étude des processus aléatoires. Elle est apparue en 1930 avec les premiers travaux de Wiener et Kintchin sur les processus aléatoires, et ceux de Nyquist et Hartley sur la quantité d'information transmise sur une voie télégraphique.

Les contributions essentielles au TS n'interviennent qu'après la guère mondiale. Invention du transistor en 1948, travaux de Shannon sur la communication, de Wiener sur le Filtrage et de Schwartz sur les distributions.

Chapitre :1 Signaux, Fonctions et Opérateurs de Base

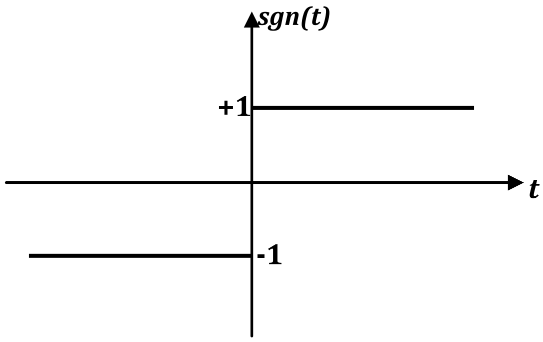
Introduction

Dans ce chapitre on présente la description mathématique de signaux élémentaires, souvent idéaux (ne sont pas réalisable physiquement), mais très pratiques pour la description de modèles mathématique.

*signaux usuels

1- fonction signe : noteé ***sgn(t)***

C'est une fonction réelle de la variable réelle *t* définie par :



$$\boldsymbol{sgn}(\boldsymbol{t}) = \begin{cases} +\mathbf{1}, \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{t} > 0 \\ -\mathbf{1}, \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{t} < 0 \end{cases}$$

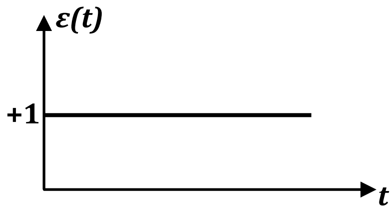
La fonction sgn est une fonction impaire

sgn(t)=-sgn(-t), $\forall$ ***t***

Par convention, on définit : ***sgn(0)=0***

2- fonction échelon unité : notée ***ε(t) ou u(t)***

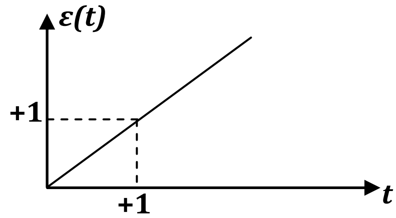
Echelon unité, échelon ou fonction de Heaviside, est une fonction réelle de la variable réelle *t* défini par :



$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{t}) = \begin{cases} +\mathbf{1}, \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{t} > 0 \\ \mathbf{0},\ \ \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{t} < 0 \end{cases}$$

Avec par convention : ***ε(0)=1/2***

3- fonction rampe : notée ***r(t)*** :

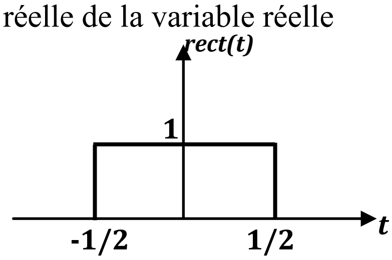


$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t}) = \begin{cases} \boldsymbol{t}, & \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{t} > 0 \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{t} < 0 \end{cases}$$

NB : $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t}) = \int_{-\infty}^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{du}$

4- fonction rectangle ou porte : notée ***rect*** : ***Π(t)***

- La fonction rectangle unité ou fonction porte, de largeur 1, est une fonction réelle de la variable réelle *t* définie par :



$$\boldsymbol{rect}(\boldsymbol{t}) = \begin{cases} +\mathbf{1}, \boldsymbol{si}\ \dfrac{-\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \leq \boldsymbol{t} \leq \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \\ \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{ailleurs} \end{cases}$$

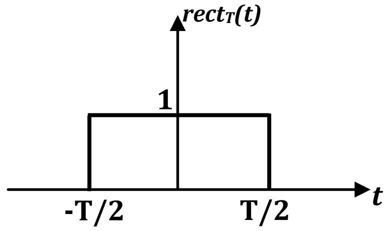
NB : ***rect(t)= ε(t+1/2)- ε(t-1/2)***

RQ :

On remarque que l'aire de la fonction rectangle de largeur unité vaut 1.

- La foction rectangle, ou porte, de largeur T, notée $\boldsymbol{rect_T}$, est une fonction réelle du variable réelle définie par :

$$rect_T(t) = \begin{cases} +1, si\ \frac{-T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, \quad ailleurs \end{cases}$$

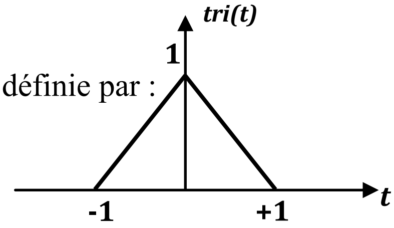


$rect_T(t)=rect(t/T)= \varepsilon(t+T/2)- \varepsilon(t-T/2)$

NB : l'aire de la fonction rectangle de largeur T vaut T.

5-fonction triangle : notée ***Tri(t)* ou *Δ(t)***

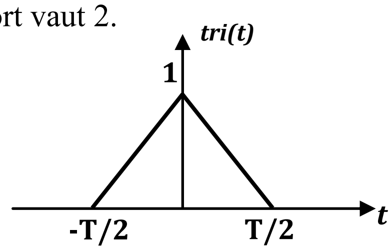
La fonction triangle est une fonction réelle de la variable réelle *t* définie par :



$$tri(t) = \begin{cases} 1-|t|, \quad si\ |t| \leq 1 \\ 0, \quad si\ non \end{cases}$$

NB : l'aire de la fonction triangle unité 1 et la largeur de son support vaut 2.

- La fonction triangle de largeur 2T (ou d'aire égale à T) est notée :

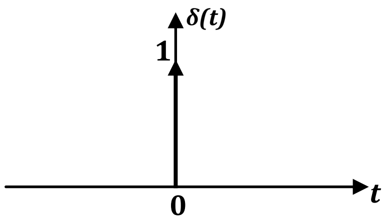


$$tri_T(t) = \begin{cases} 1-|t|/T,\ si\ |t| \leq T \\ 0,\ ailleurs \end{cases}$$

6- Impulsion de Dirac : notée ***δ(t)***

Impulsion de Dirac, ou distribution de Dirac, vérifie :

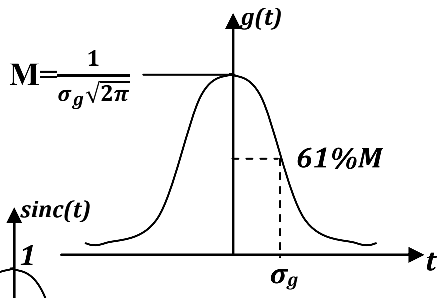
$$\delta(t) = \begin{cases} 1, \quad si\ t = 0 \\ 0, \quad ailleurs \end{cases}$$



Propriété : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u)du = 1$

7- **la Gaussienne** : notée ***g(t)***

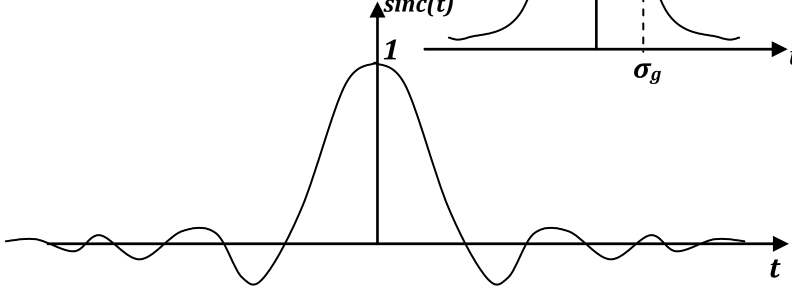
La Gaussienne ou cloche, définie par :



$$g(t) = \frac{1}{\sigma_g\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2\sigma_g^2}}$$

8- **sinus Cardinal** : notée ***sinc(t)***

Cette fonction est définie par :



$$sinc(t) = \frac{sin(t)}{t}$$

NB : la distribution de Dirac peut être vue comme la limite de fonctions :

$$\delta(t) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{T} rect(\frac{t}{T})$$

$$\delta(t) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{T} tri(\frac{t}{T})$$

$$\delta(t) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{T} sinc\left(\frac{t}{T}\right) = \lim_{T\to 0} \frac{sin(\pi t/T)}{\pi t}$$

III-Fonctions et opérateurs de base :

1- Règle de l'hopital :

Soient ***f(t)*** et ***g(t)*** deux fonctions continues et dérivables en $\mathbf{t_0}$ et telles que :

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = \lim_{t\to t_0} g(t) = 0$$

Alors :

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to t_0} \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

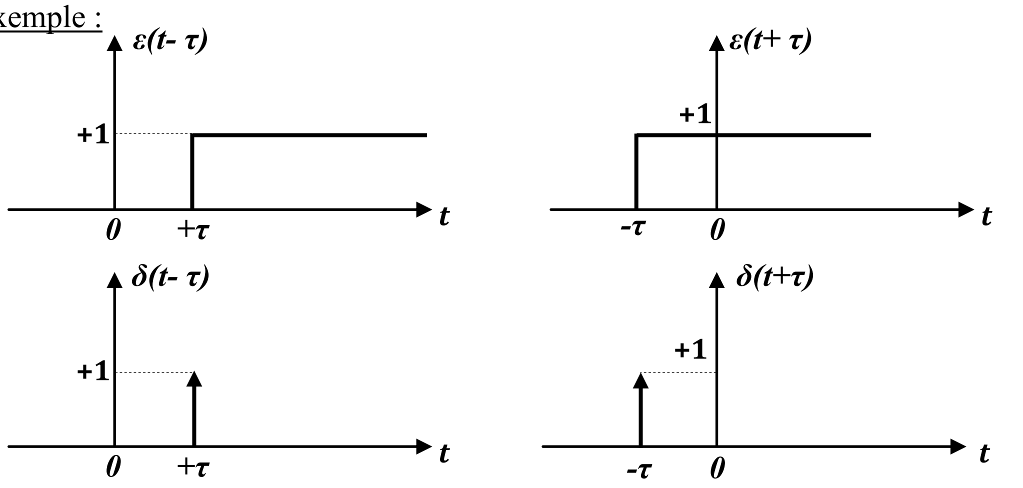
Exemple :

$$\lim_{t\to 0} \frac{sin(t)}{t} = \lim_{t\to t_0} cos(t) = 1$$

2- Décalage ou translation :

Les signaux ou fonctions peuvent être retardées ou avancées d'une valeur $\tau>0$

Exemple :



3- Produit d'une fonction par un Dirac

$$x(t).\ \delta(t-t_0)= x(t_0).\ \delta(t-t_0)$$

4- Calcule d l'intégrale d'un produit avec un Dirac :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$$

5- Valeurs caractéristiques d'un sgn

Soit in signal ***x(t)*** définit sur un intervalle $[t_1,t_2]$

Valeur moyenne : $\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}$

Valeur quadratique, ou énergie : $\boldsymbol{W_x} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{x^2}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}$

Valeur quadratique moyenne ou puissance **:** $\boldsymbol{P_x} = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{x^2}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}$

$$\boldsymbol{P_x} = \frac{\boldsymbol{W_x}}{\boldsymbol{t_2 - t_1}}$$

- Valeur efficace : $x_{eff} = \sqrt{P_x}$

6- <u>Distance entre deux signaux :</u>

Soientt deux signaux ***x(t)*** et ***y(t)*** dont les représentations vectorielles sont :

$$\begin{cases} x(t) \to \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\ y(t) \to \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \end{cases}$$

- Distance Euclidienne : $d_1(x(t), y(t)) = (\sum_{k=1}^{m} |x_k - y_k|^2)^{1/2}$
- La distance entre deux sgnx sur un intervelle T est :

  $d_2(x(t), y(t)) = \left[K \int_T |x(t) - y(t)|^2 dt\right]^{1/2}$: Distance en moyenne quadratique, où K : constante de normalisation (*K=1* ou *K=1/T*)
- Pour les signaux binaires, on utilise la distance de Hamming :

$$d_H(x(t), y(t)) = \sum_{k=1}^{K} x_k \oplus y_k$$

Où, $\oplus$: c'est le ou exclusif

Cette distance mesure le nombre de bits différents entre *x* et *y.*

7- <u>Norme d'un signal :</u>

Soit un signal *x(t)* défini sur un intervalle [t_1, t_2], la norme de *x(t)* est donnée par :

$$\|x(t)\| = \left[\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt\right]^{1/2}$$

Soit un signal : $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_m \end{bmatrix}$, on défini les normes suivantes :

$$\|x(t)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$$

$$\|x(t)\| = \max\left(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_m|\right)$$

$$\|x(t)\| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_m| = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$$

8- Produit scalaire de signaux :

Soient deux signaux x(t) et y(t) sur $[t_1, t_2]$, on peut définir le produit scalaire par :

$$\langle x, y\rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t).\, y^*(t)dt$$

Où * : indique la conjugaison complexe

RQ : $\langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$ et $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^*$

9- Fonctions orthogonales :

Deux signaux sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul, c-à-d., si :

$$\langle x, y\rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t).\, y^*(t)dt = 0$$

RQ : le choix de l'intervalle $[t_1, t_2]$ est important car :
$\langle x, y\rangle = 0$ dans $[t_1, t_2]$ n'entraine pas l'orthogonalité dans tous les intervalles.

10- Lien entre produit scalaire et distance enclidienne :

$$d^2(x, y) = \langle x - y, x - y\rangle = \|x^2\| + \|y^2\| - 2\mathbb{R}(\langle x, y\rangle)$$

Si $\langle x, y\rangle = 0$: $d^2(x, y) = \|x - y\|^2 = \|x^2\| + \|y^2\|$

Approxination d'un signal :

Soit un signal $x(t) \in L^2(t_1, t_2)$ de dimension *N* et $B = \{\psi_1(t), \cdots, \psi_M(t)\}$ une base d'un sous-espace de $L^2(t_1, t_2)$. On peut définir dans le sous-espace une approximation d'ordre M de x(t), notée $\hat{x}(t)$

$$\hat{x}(t) = \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \psi_m(t)$$

L'erreur d'approximation est définie par : $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$
Et on appel erreur quadratique la quantité : $\|e\|^2 = d(x, \hat{x})$
α_m : sont choisis de façon à minimiser la distance $d(x, \hat{x})$

11- Produit de convolution

L'opérateur de convolution est très courant. Il est associé à l'opération de filtrage d'un signal *x(t)* par un filtre de réponse impulsionnelle *h(t)*

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

La sortie du filtre, *y(t)* vaut : $y(t)=x(t)*h(t)$

$$(x*h)(t) = x(t)*h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-v)h(v)dv$$

$$= (h*x)(t)$$

Si $x(t)=\delta(t) \Rightarrow y(t)=\delta(t)*h(t)=h(t)$ => *d'où le nom réponse impulsionnelle*

Propriétes

- Conmutatif : $x_1(t)*x_2(t)= x_2(t)*x_1(t)$
- Associatif : $x_1(t)*[x_2(t)* x_3(t)] = [x_1(t)* x_2(t)] * x_3(t)$
- Distributif p/r à l'addition : $x_1(t)*[x_2(t)+ x_3(t)] = x_1(t)* x_2(t)+ x_1(t)* x_3(t)$

Chapitre : 2 Classification des Signaux

I- Introduction :

Les signaux étant des grandeurs physiques représentant des phénomènes physiques peuvent être classés sous plusieurs catégories selon leurs propriétés.

II- Signaux physiques et modèles :

1- Signaux réalisables :

Un signal est le résultat d'un système physique réel, qui est donc réalisable, ce qui induit plusieurs propriétés :

- l'énergie du signal est bornée.
- l'amplitude du signal est bornée.
- l'amplitude du signal est bornée et tend vers *0* lorsque la fréquence tend vers l'infini ∞.

2- Modèle :

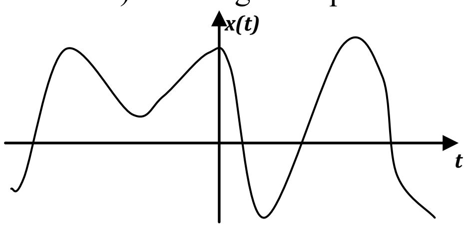
Les modèles de signaux sont des représentations mathématiques qui reposent sur des hypothèses simplificatrices mais permettant d'effectuer des calculs théoriques (Dirac, Sinus).

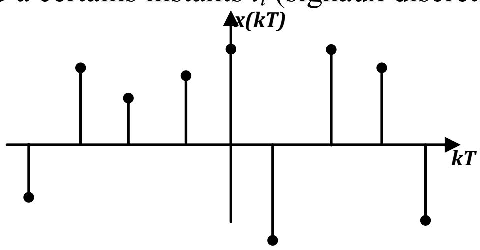
Le modèle est donc une approximation de la réalité. L'intérêt du modèle dépend donc de la qualité de l'approximation et de sa facilité d'emploi.

III- Classification des signaux :

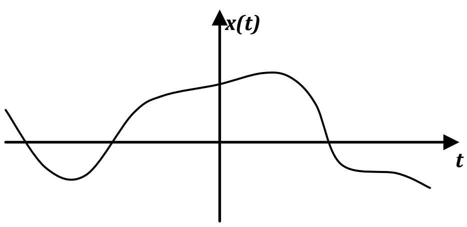
Il existe différents modes de classification :

1- Morphologique : on distingue les signaux qui ont des valeurs à chaque instant t (signaux continus) et les signaux qui n'ont de valeurs qu'à certains instants t_i (signaux discrets).

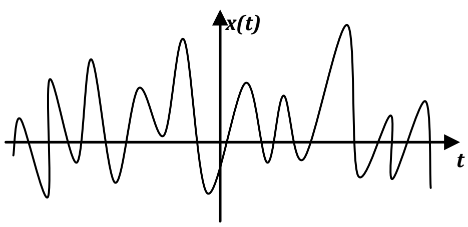




2- Spectrale :
On classe les signaux suivant la bande de fréquences qu'ils occupent



Signal à variations lentes
Signal basses fréquences



Signal à variations rapides
Signal Hautes fréquences

3- Energétique :

Les signaux peuvent être à énergie finie ou à puissance moyenne finie.

- Les signaux à énergie finie vérifient la condition.

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$$

On dit aussi qu'ils sont de carré sommable. Les signaux à support borné, c-à-d de durée limitée, sont à énergie finie.

- Les signaux à puissance moyenne finie sont tels que :

$$0 < P_x = \lim_{T \to +\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \right] < +\infty$$

- Les signaux périodiques sont à puissance moyenne finie.

RQ :

- Un signal à énergie finie (W_x<+∞), a une puissance moyenne $P_x=0$.
- Un signal à puissance moyenne finie (non nulle $P_x \neq 0$ et P_x<+∞), possède une énergie W_x infinie.

Exemple :

x(t)=rect(t/T), $W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-T/2}^{T/2} 1 dt = T$

Sa puissance moyenne $P_x=0$

4- Typologique : on distingue les signaux selon leur évolution si celle-ci est déterministe ou aléatoire :

a- signal déterministe :

Ce type de signal peut être prédit par un modèle mathématique connu.

Ils existent deux sous classes :

- les signaux périodes x(t)=x(t+T)/ T période du signal.
- les signaux non périodiques.

b- signal aléatoire :

Ce type de signal a un comportement imprévisible. On le décrit grâce à des outils statistiques (densité de probabilités, moyenne, variance,………).

On distingue :

- ***Signal stationnaire*** : un signal aléatoire *x(t)* est stationnaire si ses caractéristiques statistiques sont invariantes dans le temps.
- ***Signal ergodique*** : un signal aléatoire *x(t)* est ergodique si les valeurs moyennes statistiques (moyennes d'ensemble) sont égales aux valeurs moyennes temporelles (sur une réalisation).

$$E[x(t)] = \lim_{T \to +\infty} \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt \right]$$

5- Dimensionnelle :

Les signaux peuvent être de dimensions différentes.

Signaux 1D *x(t)* : voie

Signaux 2D *I(x,y)* : image

Signaux 3D *I(x,y,z)* : image dans l'espace .

Chapitre : 3 Séries et Transformée de Fourier

I- Introduction :

Les signaux de $\boldsymbol{L^2(t_1, t_2)}$ peuvent être approximés en utilisant une base adéquate d'un sous espace de $\boldsymbol{L^2}$.

$\boldsymbol{L^2}$: carré sommable

$x(t) \in \boldsymbol{L^2} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt < \infty$

II- Séries de Fourier

Tout signal $\boldsymbol{x(t) \in L^2 (t_1, t_1+T)}$, c-à-d. $\boldsymbol{x(t)}$ est périodique, peut être développé en séries de Fourier à partir de signaux de base de forme exponentielle complexe :

$$\psi_k(t) = \exp\left(j2\pi n\frac{t}{T}\right) = e^{j2\pi n\frac{t}{T}} = e^{j2\pi n f_0 t}$$

$f_0 = \frac{1}{T}$, T : la période du signal, $n \in \mathbb{Z}$ (*k : entier*)

Telles que : $\forall\, n \neq i, \langle\psi_n, \psi_i\rangle = 0 \; et \; \langle\psi_n, \psi_n\rangle = T$

c-à-d. les fonctions ψ_n sont orthogonales.

Le signal $x(t)$ peut être approximé par cette base s'il existe une suite C_n telle que :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\psi_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n\frac{t}{T}}$$

Avec $C_n = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t)e^{-j2\pi n\frac{t}{T}}dt$

Cette série converge vers $x(t)$, si $x(t)$ est continue en t.

Les C_n sont appelées : raies, composantes ou harmoniques du signal.

- C_1 : composante continue $= \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t)dt$
- C_2 : première harmonique ou fondamentale du signal $x(t)$
- C_n : contribution de la n^{ème} harmonique.

1- Propriétés :

- si $x(t)$ réelle => $C_n = C_{-n}$ ($x(t)=x^*(t)$)
- si $x(t)$ réelle et paire => C_n réel ($x(t)=x^*(t)=x(-t)$)
- si $x(t)$ réelle et impaire => C_n imaginaire ($x(t)=-x(-t)=x^*(t)$)

2- Relation de parseval (*identité ,égalité* de Parseval)

La relation de Parseval montre qu'il y'a conservation de la puissance P_x lorsque l'on passe d'une représentation temporelle à une représentation fréquentielle : on a :

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} |x(t)|^2dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

III- Transformée de Fourier

La transformation de Fourier (TF) est une extension de la décomposition en série de Fourier, mais pour des signaux quelconques.

Définition 1 : Soit un signal certain *x(t)*, sa TF est une fonction complexe de la variable réelle *f* définie par :

$$TF\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} = X(f) = \langle x, \exp(-j2\pi ft)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

X(f) est la superposition d'une infinité de raies qui s'étendent, dans le domaine fréquentiel, de -∞ à +∞.

Définition 2 : On appelle transformée de Fourier inverse (TFI) la relation :

$$TF^{-1}\{x(t)\} = \mathcal{F}^{-1}\{x(t)\} = x(t) = \langle x, \exp(j2\pi ft)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

RQ : la TF de *x(t)* *(X(f))* ∄ si $\int x(t)dt$ ∃ (*x(t)* est une fonction bornée)

Exple : soit la fonction *rect* ou porte

x(t)=rect(t/T)

Calculer sa TF

$$x(t) = \begin{cases} 1 \; si \; t \in \left[\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ 0 \;\; ailleurs \end{cases}$$

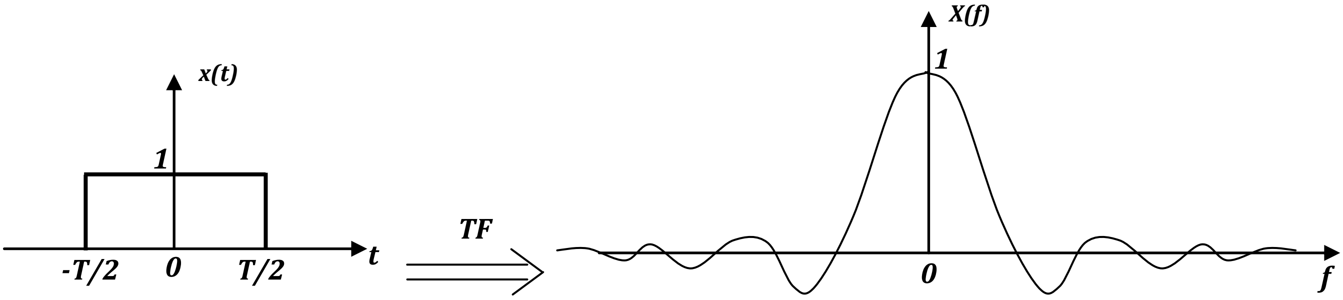
On a :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-j2\pi ft}dt = -\frac{1}{j2\pi f}\left[e^{-j2\pi ft}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{1}{\pi f}\left[\frac{e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}}{j2}\right] = \frac{1}{\pi f}\sin(\pi fT) = T \cdot \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}$$

$$\boxed{X(f) = T \cdot \mathrm{sinc}\,(\pi fT)}$$



Propriétes de la TF

Soient deux sgnx $x(t)$ et $y(t)$ ayant pour TF, $X(f)$ et $Y(f)$, respectivement :
On peut vérifier les propriétés suivantes :

- Linéarité :

$$\alpha.x(t)+\beta y(t) \leftrightarrow \alpha.X(f)+\beta Y(f)$$

- parité : la TF conserve la parité

$x(t)$	$X(f)$
Réelle paire	Réelle paire
Réelle impaire	Imaginaire impaire
Imaginaire paire	Imaginaire paire
imaginaire impaire	Réelle impaire

- Transformée d'un signal réel
  La TF d'un signal réel $x(t)$ est une fonction complexe :
  $x(t)= x_p(t) + x_i(t)$

$$x(t) = \underbrace{x_p(t)}_{pair} + \underbrace{x_i(t)}_{impair}$$

$X(f)= X_p(f) + X_i(f)$
$=Re\{X(f)\}+jIm\{X(f)\}$

⇨ $X(f)=|X(f)|.e^{j\phi_x(f)}/\ \phi_x(f) = arctg\frac{I_m\{X(f)\}}{Re\{X(f)\}}$

- $|X(f)|$:spectre d'amplitude, fonction paire.
- $\phi_x(f)$: spectre de phase, fonction impaire.
- Spectre on densité spectrale de puissance = $|X(f)|^2$

- Complexe conjugué :

$$x^*(t) \rightleftarrows X^*(-f)$$

- Changement d'échelle sur t :

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X(f/a)$$

Cas particulier :

$$x(-t) \leftrightarrow X(-f)$$

- Translation sur t :

$$x(t-t_0) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

- Translation sur f ou modulation :

$$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f-f_0)$$

- Dérivation p /r à t :

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$$

- Intégration p/r à t :

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f}X(f),\ \text{si}\ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)d\tau = 0$$

- Convolution : (Théorème de Plancherel)

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f) \cdot Y(f)$$
$$x(t) \cdot y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f)$$

- Dérivation en fréquence :

$$\frac{dX(f)}{df} \leftrightarrow (-j2\pi t)x(t)$$
$$\frac{d^n}{df^n}X(f) \leftrightarrow (-j2\pi t)^n x(t)$$

- Transformée de Fourier (TF) des sgnx usuels :

$$x(t) = \delta(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} X(f) = 1$$

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \overset{TF}{\leftrightarrow} X(f) = \delta(f - f_0)$$

$$x(t) = \delta(t - t_0) \overset{TF}{\leftrightarrow} X(f) = e^{-j2\pi f t_0}$$

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \overset{TF}{\leftrightarrow} X(f) = \frac{1}{2}\left[e^{j\varphi_0}\delta(f - f_0) + e^{-j\varphi_0}\delta(f + f_0)\right]$$

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) \overset{TF}{\leftrightarrow} X(f) = \frac{1}{j2}\left[e^{j\varphi_0}\delta(f - f_0) - e^{-j\varphi_0}\delta(f + f_0)\right]$$

Théorème de Parseval :

Soient *x(t)* et *y(t)* deux sgnx ayant pour TF *X(f)* et *Y(f)* respectivement, alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y(f)df$$

Et dans le cas particulier : *y(t)=x(t)*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Ce théorème indique que l'énergie est conservée dans les représentations en temps et en fréquence.

T .F .d'un sgn à valeur moyenne non nulle :

$$x(t) = \bar{x} + x_0(t)$$

$\bar{x}$: la valeur moyenne de *x(t)*

$x_0(t)$: sgn à valeur moyenne nulle

$$X(f) = \bar{x}\delta(f) + TF\{x_0(t)\}$$

TF des sgnx périodiques :

Un sgn *x(t)* périodique s'écrit sous la forme développée en série de Fourier

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(\mathrm{n\omega t}) + \mathrm{b_n} \sin(\mathrm{n\omega t}))$$

Où :

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(n\omega t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin(n\omega t)dt$$

Avec : $\omega=2\pi f$

D'après la formule d'Euler :

$$\cos(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2}$$

$$\sin(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{j2}$$

Alors,

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{a_n - jb_n}{2}\right)\mathrm{e^{jn\omega t}} + \left(\frac{\mathrm{a_n + b_n}}{2}\right)\mathrm{e^{-jn\omega t}}\right)$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + x_{01}(t) + x_{02}(t)$$

$$x_{01}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - jb_n}{2}\right)\mathrm{e^{jn\omega t}} \quad \text{et} \quad x_{02}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n + jb_n}{2}\right)\mathrm{e^{-jn\omega t}}$$

x(t) peut être approximé par :

$$x(t) \approx 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - jb_n}{2}\right)\mathrm{e^{jn\omega t}} \quad \text{ou} \quad x(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{a_n - jb_n}{2}\right)\mathrm{e^{jn\omega t}}$$

Pour la 2ème approximation on pose :

$$C_n = \left(\frac{a_n - jb_n}{2}\right)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \mathrm{e^{jn\omega t}}$$

$$C_n = X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{x(t)e^{-j\frac{2\pi nt}{T}}dt}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi n t}{T}}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{x(t)e^{-j2\pi ft}dt}$$

$\Rightarrow \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$