Examen de traitement du signal

Feuille A4 recto-verso autorisée durée : 1 h 45
Appareils électroniques personnels interdits mardi 12 janvier 2016

Exercice 1 (4 %)

Quelle est la transformée de Fourier d'un signal porte (inutile d'effectuer le calcul ou de justifier) ?

Exercice 2 (4 %)

Quel est le résultat du produit de convolution d'un signal $x(t)$ par $A\delta(t-T)$?

Exercice 3 (4 %)

Représentez une sinusoïde d'amplitude 1, de période 600 ms, de phase nulle échantillonnée à 5 Hz entre 0 et 1 s.

Exercice 4 (8 %)

1. Quelle condition sur la fréquence d'échantillonnage doit-on respecter pour éviter le repliement spectral lors de la numérisation d'un signal ?
2. Pour une fréquence d'échantillonnage f_e, quelle est la valeur limite de la fréquence de coupure du filtre anti-repliement ? Est-ce une valeur maximale ou minimale ? Justifiez vos réponses.

Exercice 5 (16 %)

L'ondelette de Haar correspond au signal continu suivant :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Tracez ce signal pour $t \in [-2; 2]$ (prenez soin de bien annoter le graphique).
2. Calculez sa transformée de Fourier. On rappelle que :

$$e^{-a} - e^{-b} = e^{-\frac{a+b}{2}} \left(e^{-\frac{a-b}{2}} - e^{-\frac{b-a}{2}} \right).$$

Exercice 6 (20 %)

1. Exprimez dans $\mathbb{R}^3$ les signaux suivants :

$$x_1[n] = \delta[n] + \delta[n-1] \qquad \text{et} \qquad x_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

   (le premier élément des vecteurs correspond au temps nul).
2. Sont-ils orthogonaux ?
3. Calculez la norme de ces signaux. Comment les modifier en des vecteurs x'_1 et x'_2 afin que $\|x'_1\| = \|x'_2\| = 1$?
4. Quel est le nombre I de signaux nécessaires pour définir une base dans $\mathbb{R}^3$?
5. Proposez un ou plusieurs signaux x'_i $(i > 2)$ de telle sorte que $\{x'_i\}_{i \in \{1,\dots,I\}}$ soit une base.

Exercice 7 (16 %)

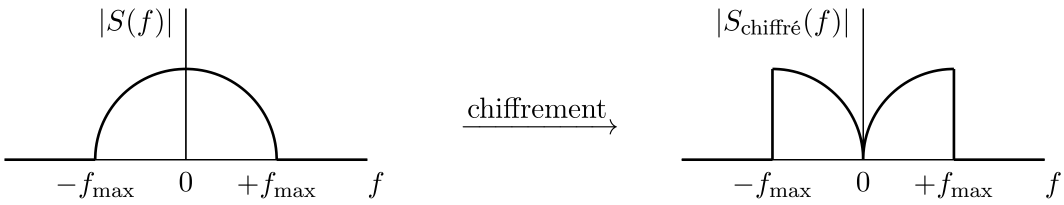
1. Calculer le produit de convolution $x * y$ où

$$x[n] = \begin{cases} n & \text{pour } |n| \leq 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad y[n] = \begin{cases} -n & \text{pour } |n| \leq 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Représentez le résultat du produit de convolution sur $\{-5, \dots, 5\}$.

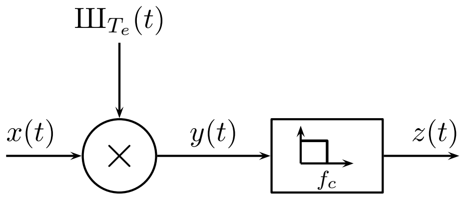
Exercice 8 (12 %)

Lorsque Canal+ émettait encore en analogique, le son $s(t)$ était chiffré en modifiant son spectre comme schématisé ci-dessous. Proposez une technique pour réaliser cette opération.



Exercice 9 (16 %)

On applique la chaîne de traitement ci-dessous à un signal sinusoïdal : le signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ avec $f_0 = 2000$ Hz est échantillonné à une fréquence $f_e = 6000$ Hz pour obtenir le signal $y(t)$, puis filtré par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = f_e/2$ pour obtenir le signal $z(t)$.



1. Représentez les modules des spectres de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.
2. Comparez le signal $z(t)$ avec $x(t)$.