Examen de traitement du signal

Feuille A4 recto-verso autorisée — durée : 1 h 45
Appareils électroniques personnels interdits — mardi 3 janvier 2017

Les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte !

Exercice 1 (4 %)

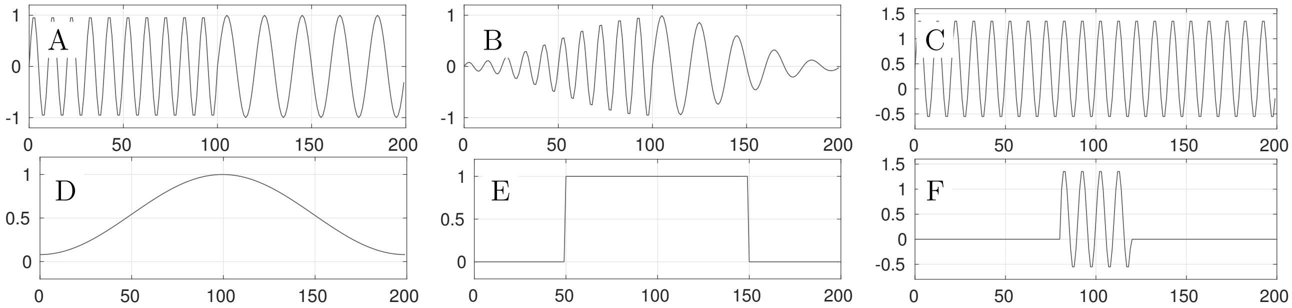
Quel est le résultat de la convolution d'un signal $x(t)$ par $a\delta(t-T)+b\delta(t+T)$ où a et b sont des constantes ?

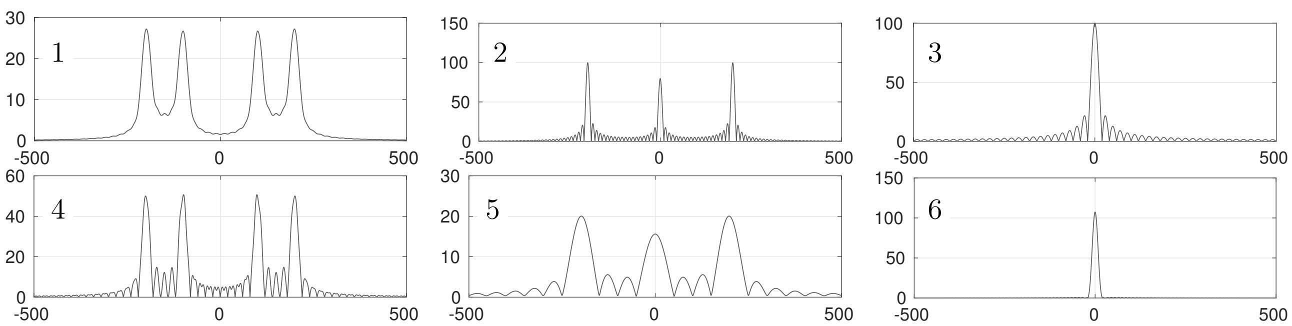
Exercice 2 (7 %)

1. Donnez l'amplitude, la fréquence et la phase de la sinusoïde $x(t) = 3\sin\big(10\pi(t-2)\big)$.
2. Représentez cette sinusoïde sur [0,1]. Prenez soin de bien préciser annoter les axes.

Exercice 3 (11 %)

Associez pour chaque signal temporel (identifié par une lettre) le spectre correspondant (identifié par un chiffre). Justifiez chaque association !
Remarques — Les signaux (temporels ou spectres) sont représentés en fonction des échantillons (temporels ou fréquentiels). Seul le module des spectres est représenté. Les transformées de Fourier discrètes sont représentés sur 10 fois plus de points que les signaux temporels. Un zoom sur le centre des spectres est effectué.





Exercice 4 (7 %)

1. Quelle condition sur la fréquence d'échantillonnage doit-on respecter pour éviter le repliement spectral lors de la numérisation d'un signal ?
2. Pour une fréquence d'échantillonnage f_e, quelle est la valeur limite de la fréquence de coupure du filtre anti-repliement ? Est-ce une valeur maximale ou minimale ?

Exercice 5 (19 %)

Le signal à échantillonné $x[n]$ est défini sur $\{0, \ldots, N-1\}$. Les $N/2$ premiers échantillons valent 1 ; les autres sont nuls.

1. Sur combien d'échantillons est défini $x[n]$?
2. Représentez $x[n]$ pour pour $N = 10$.
3. Donnez l'expression mathématique de $x[n]$.
4. Calculez la transformée de Fourier discrète de $x[n]$, et exprimez le résultat en fonction du noyau de Dirichlet $D_a(b)$:

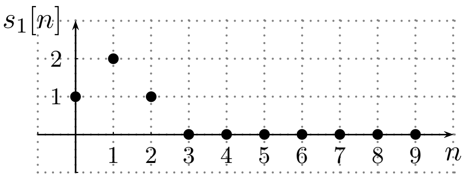
$$D_a(b) = \begin{cases} 1 + 2a & \text{si } b \text{ est multiple de } 2\pi, \\ \dfrac{\sin\left(\left(a + \frac{1}{2}\right) b\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

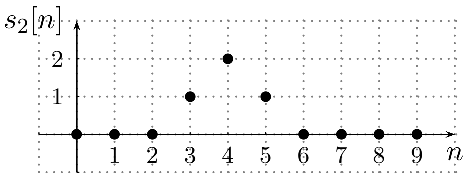
Exercice 6 (11 %)

Les logiciels de reconnaissance vocale présents dans les smartphones ne font pas le traitement proprement dit : ils transmettent le signal sonore à un serveur qui effectuera la reconnaissance puis renverra la phrase reconnue. Environ 50 ko sont nécessaires pour transmettre un message de 2 s[1]. Proposez une valeur de fréquence d'échantillonnage et un nombre de niveaux de quantification nécessaires pour transmettre un tel message.

Exercice 7 (15 %)

On considère les deux signaux s_1 et s_2 dans $\mathbb{R}^{10}$ représentés ci-dessous. Ces deux signaux sont orthogonaux.





1. Proposez un signal s_3 orthogonal à s_1 et s_2 (justifiez votre réponse).
2. Proposez un signal s_4 orthogonal à s_1, s_2 et s_3 (justifiez votre réponse).
3. Calculez la norme de ces quatre signaux.
4. Calculez la distance de s_1 à s_2, puis à s_3, puis à s_4.
5. Combien de signaux sont nécessaires pour construire une base dans $\mathbb{R}^{10}$?

Exercice 8 (11 %)

1. Représentez les signaux $x[n]$ et $y[n]$ pour $n \in \{-10, \ldots, 10\}$:

$$x[n] = \begin{cases} 2 - |n| & \text{si } n \in \{-2, \ldots, 2\}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad y[n] = \begin{cases} (-1)^n & \text{si } n \in \{-10, \ldots, 10\}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Calculez le produit de convolution $(x * y)[n]$.

1. Source : J. Cheng, « Siri, how much data do you gobble up in a month ? », Ars Technica, 2011. http://arstechnica.com/apple/2011/11/how-data-heavy-is-siri-on-an-iphone-4s-ars-investigates/.

Exercice 9 (15 %)

Deux signaux $m_1(t)$ et $m_2(t)$ sont modulés en amplitude avec des porteuses de même fréquence f_p mais en quadrature de phase :

$$x_1(t) = m_1(t)\cos(2\pi f_p t) \qquad\qquad x_2(t) = m_2(t)\sin(2\pi f_p t)$$

Un émetteur radio émet la somme

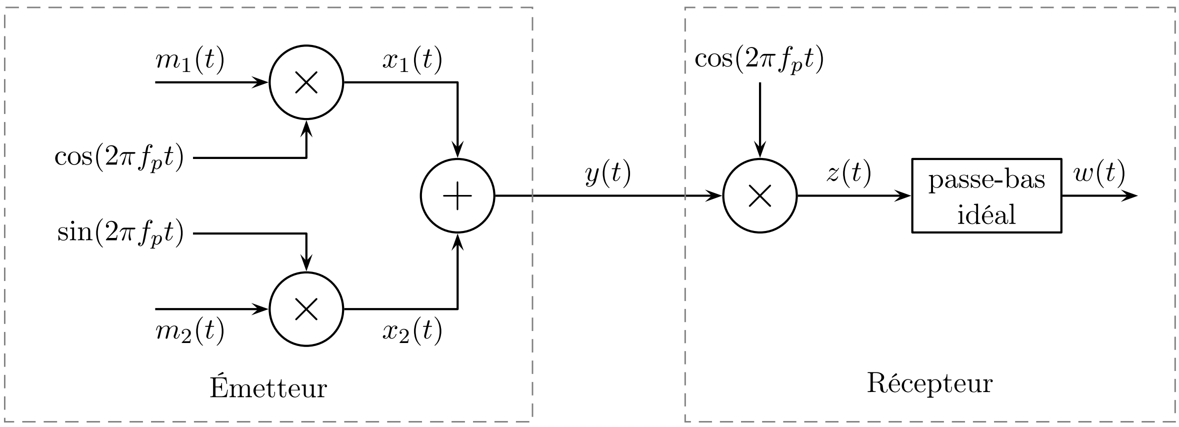
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

Le récepteur effectue une démodulation cohérente en multipliant le signal reçu par un cosinus à la fréquence f_p :

$$z(t) = y(t)\cos(2\pi f_p t)$$

puis en appliquant un filtre passe-bas (supposé idéal).

Par ailleurs, les signaux $m_1(t)$ et $m_2(t)$ sont à bande limitée : $M_1(f) = 0$ et $M_2(f) = 0$ pour $|f| > f_p$, où $M_1(f)$ et $M_2(f)$ sont les transformées de Fourier de $m_1(t)$ et $m_2(t)$.



On rappelle les transformées de Fourier du cosinus et du sinus :

$$\mathcal{F}\big[\cos(2\pi f_0 t)\big](f) = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2} \qquad \mathcal{F}\big[\sin(2\pi f_0 t)\big](f) = \frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2j}.$$

1. Déterminez les transformées de Fourier de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ en fonction de $M_1(f)$ et $M_2(f)$.
2. En déduire la transformée de Fourier de $y(t)$.
3. Déterminez la transformée de Fourier de $z(t)$.
4. Le filtre passe-bas idéal a une fréquence de coupure égale à f_p. Quel est le signal $w(t)$ en sortie du filtre passe-bas ?