FIP 1^{re} année — Traitement du signal — 2017–2018

Examen de traitement du signal

Feuille A4 recto-verso autorisée — durée : 1 h 45
Appareils électroniques personnels interdits — mardi 9 janvier 2018

Les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte !

Exercice 1 (22 %)

1. Représentez les signaux $x[n]$ et $y[n]$ pour $n \in \{-5, \ldots, 5\}$:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{0, \ldots, 3\}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad y[n] = \begin{cases} n & \text{si } |n| = 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Quel est le résultat du produit de convolution du signal $x[n]$ par une impulsion discrète $\delta[n]$?
3. Calculez le produit de convolution $(x * y)[n]$.

Exercice 2 (12 %)

On considère dans $\mathbb{R}^4$ le signal $x[n] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Calculez la norme de $x[n]$.
2. Donnez un signal non nul orthogonal à $x[n]$.
3. À l'aide du produit scalaire, calculez la projection de $x[n]$ dans la base des signaux $\varphi_k[n]$ où :

$$\varphi_0[n] = \begin{bmatrix} +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \varphi_1[n] = \begin{bmatrix} +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\varphi_2[n] = \begin{bmatrix} +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \varphi_3[n] = \begin{bmatrix} +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Exercice 3 (17 %)

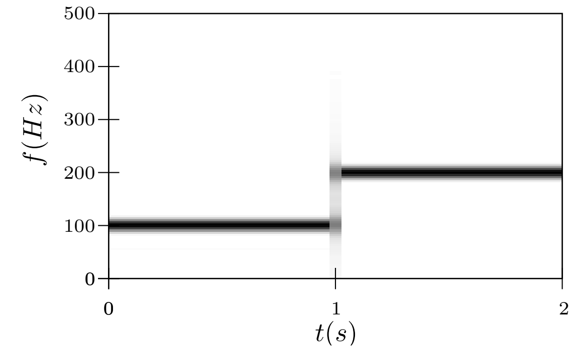
L'ondelette de Haar correspond au signal continu suivant :

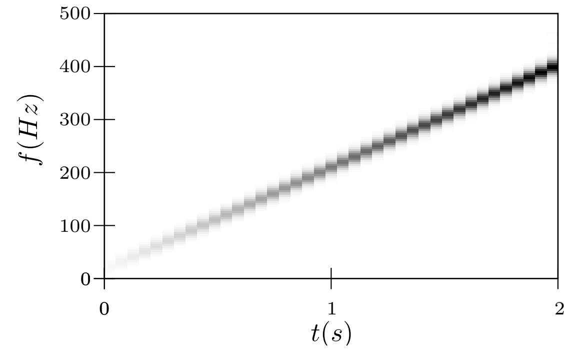
$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Tracez ce signal pour $t \in [-2; 2]$ (prenez soin de bien annoter le graphique).
2. Calculez sa transformée de Fourier.

Exercice 4 (12 %)

Quels sont les signaux temporels associés aux représentations temps–fréquence ci-dessous (transformées de Fourier à court terme) ? Les valeurs faibles sont représentées en blanc, les valeurs élevées en noir.





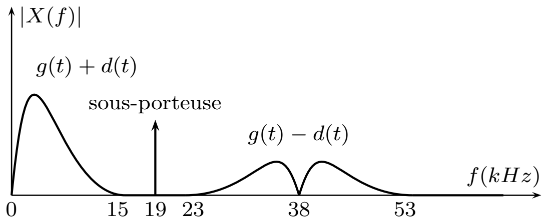
Exercice 5 (8 %)

Quelle est la condition à respecter pour éviter le repliement spectral lors de la numérisation d'un signal ?

Exercice 6 (17 %)

Un enregistrement stéréo contient deux signaux : les voies gauche $g(t)$ et droite $d(t)$. Le spectre du signal composite stéréo $x(t)$ est défini sur la figure ci-après (seule la partie positive est représentée) :

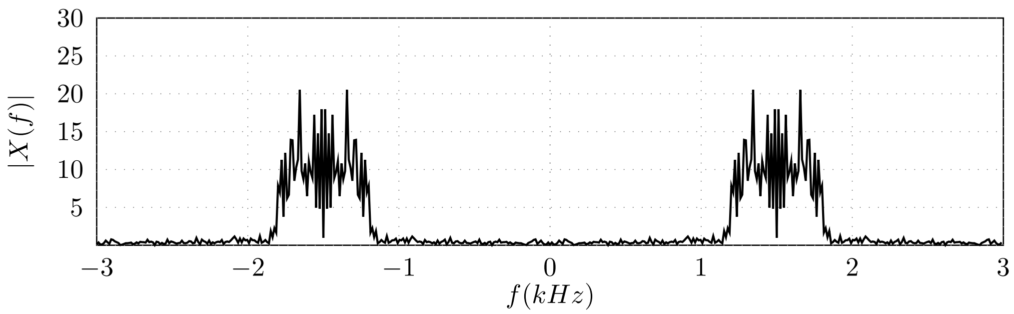
- la somme $g(t) + d(t)$ est transmise en bande de base (c'est-à-dire autour de 0 Hz) ;
- la différence $g(t) - d(t)$ est transmise en modulation d'amplitude à la fréquence $f_p = 38$ kHz ;
- enfin, une sous-porteuse à 19 kHz est également transmise pour faciliter la synchronisation du démodulateur.



1. Donnez l'expression mathématique de $x(t)$.
2. Expliquez quelles sont les opérations à effectuer pour distinguer les deux voies $g(t)$ et $d(t)$. Précisez bien les valeurs des paramètres à régler (fréquences à éliminer dans le cas de filtres, fréquence de la porteuse dans le cas d'une démodulation...).
3. Justifiez les choix utilisés pour la conception de $x(t)$:
   - quel est l'intérêt de transmettre $g(t) + d(t)$?
   - quel est l'intérêt de transmettre $g(t) - d(t)$?
   - pourquoi effectuer une modulation de $g(t) - d(t)$?
   - pourquoi transmettre une sous-porteuse ?

Exercice 7 (12 %)

Le spectre d'un signal modulé en amplitude est représenté ci-dessous.



1. Donnez la fréquence de la porteuse.
2. Donnez la fréquence maximale du signal avant modulation.
3. En plus de ce signal, on souhaite transmettre un second signal de fréquence maximale 200 Hz en modulation d'amplitude. Donnez les valeurs admissibles de la fréquence de la seconde porteuse pour garantir la transmission correcte des deux signaux.