جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Université A. Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques/MI

1ère année MI
Année universitaire
2019/2020

ANALYSE I - TD N° 1

Exercice 1. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

(1) Supposons que B est bornée. Montrer que si $A \subseteq B$, alors A est bornée et que $\sup A \leq \sup B$ et $\inf A \geq \inf B$.

(2) Supposons que A et bornée et que $B = \{ |x-y|;\ x, y \in A\}$.
— Montrer que B est majorée et que : $\sup B = \sup A - \inf A$.

(3) Supposons que $A \subset \mathbb{R}_+^*$ et que A est majorée. Posons : $A' = \left\{\frac{1}{x};\ x \in A\right\}$.
— Montrer que : $\inf A' = \dfrac{1}{\sup A}$.

(4) Supposons que A et B sont majorées et on définit l'ensemble : $A+B = \{x+y;\ x \in A \text{ et } y \in B\}$.
— Montrer que : $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 2. Montrer les assertions suivantes :

(1) Il n'existe pas de nombre rationnel qui vérifie l'équation $x^2 = 2$.

(2) L'ensemble $\{r \in \mathbb{Q}/\ r^2 < 2\}$ ne possède pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 3. Pour chacun des ensembles suivants, déterminer la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum s'ils existent des ensembles suivants (en justifiant, si nécessaire, vos réponses en utilisant la caractérisation des bornes supérieures et inférieures).

$A_1 =]-1, 2[$, $A_2 = [1, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$, $A_3 = \left\{\frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1};\ n \in \mathbb{N}\right\}$, $A_4 = \left\{\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1};\ x \in \mathbb{R}_+^*\right\}$, $A_5 = \left\{\sin\left(\frac{2n\pi}{7}\right);\ n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 4. Montrer que :

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x+y| \leq |x|+|y|$, (2) $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ : |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$, (3) $\forall x, y \in \mathbb{R} :\ \max(|x|, |y|) \leq \frac{|x+y|+|x-y|}{2}$

(4) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $\left(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow x = 0\right)$, (5) $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} : |x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

Exercice 5. Soit E la fonction "partie entière" définie sur $\mathbb{R}$.

(1) Donner $E(-7,1)$, $E(-3)$, $E(\sqrt{2})$, $E(-\pi)$.

(2) Démontrer les résultats suivants :

(a) $\forall x \in \mathbb{R} :\ E(x) \leq x < 1 + E(x)$

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R} :\ x \leq y \Longrightarrow E(x) \leq E(y)$.

(c) $\forall n \in \mathbb{N} :\ E\left((\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2\right) = 4n+1$.

(d) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} :\ E(n+x) = n + E(x)$

(3) La propriété suivante est-t-elle vraie? Justifier votre réponse

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} :\ E(nx) = nE(x)$$

Fin

Date: Dimanche, 20 octobre 2019.

Université A. MIRA - Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques / MI

Corrigé de la Série N° 1
d'Analyse 1
2019 / 2020

Exercice 01 A, B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

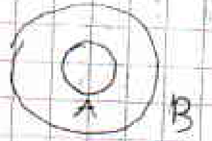
(1) B est bornée. Montrons que si $A \subset B$, alors :

(a) A bornée (b) $\sup A \leq \sup B$ (c) $\inf A \geq \inf B$

B est bornée $\Longleftrightarrow \exists M, m \in \mathbb{R}, \forall x \in B : m \leq x \leq M$

Comme $A \subset B$ (par hypothèse) alors

$\forall x \in A \Longrightarrow x \in B$



En particulier, on aura :

$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in A : m \leq x \leq M$

Il en résulte, A est bornée.

(b) $\sup A \overset{?}{\leq} \sup B$

$A \neq \phi$ majorée $\Longrightarrow \sup A$ existe

$B \neq \phi$ majorée $\Longrightarrow \sup B$ existe

$\forall x \in B : x \leq \sup B$

Comme $A \subset B$, alors cette propriété reste valable dans A

C'est-à-dire : $\forall x \in A : x \leq \sup B$

$(\sup B)$ est un majorant de A, comme $(\sup A)$ est le plus petit des majorants de A, on aura alors

$\sup B \geq \sup A$

(c) $\inf A \overset{?}{\geq} \inf B$:

$A \neq \phi$ minorée $\Longrightarrow \inf A$ existe

$B \neq \phi$ minorée $\Longrightarrow \inf B$ existe

On a, $\forall x \in B : x \geq \inf B$

$A \subset B \Longleftrightarrow [\forall x \in A \Rightarrow x \in B]$

En particulier, $\forall x \in A : x \geq \inf B$

$(\inf B)$ est un minorant de A. Comme $(\inf A)$ est le plus grand des minorants de A, alors :

$$\inf A \geq \inf B$$

(2) A est borné (majorée et minorée)

$$B = \{ |x-y|,\ x, y \in A \}$$

Montrons que : (a) B est majorée

(b) $\sup B = \sup A - \inf A$

(a) $\overset{?}{\exists} M \in \mathbb{R},\ \forall t \in B : t \leq M$

Comme A est bornée alors :

$\exists M_1, m_1 \in \mathbb{R},\ \forall x \in A : m \leq x \leq M$

$x \in A \Rightarrow m_1 \leq x \leq M_1$

$y \in A \Rightarrow m_1 \leq y \leq M_1 \Rightarrow -M_1 \leq -y \leq -m_1$

$-(M_1 - m_1) \leq x - y \leq M_1 - m_1$

Il en résulte, $\forall x, y \in A : |x-y| \leq M_1 - m_1$

ou encore, $\forall t \in B : t \leq M_1 - m_1$

$(t \in B \Rightarrow \exists x, y \in A : t = |x-y|)$

D'où, $\exists M = M_1 - m_1 \in \mathbb{R},\ \forall t \in B : t \leq M$

Cela veut dire B est majorée

(b) $\sup B \overset{?}{=} \sup A - \inf A$:

$A \neq \emptyset$ majorée et minorée $\Rightarrow \sup A, \inf A$ existent

$\forall x \in A : \inf A \leq x \leq \sup A$

$y \in A \Rightarrow \inf A \leq y \leq \sup A \Rightarrow -\sup A \leq -y \leq -\inf A$

$\inf A - \sup A \leq x - y \leq \sup A - \inf A \Rightarrow |x-y| \leq \sup A - \inf A$

$\forall t \in B ;\ t \leq \sup A - \inf A$

$(\sup A - \inf A)$ est un majorant de B, reste à montrer qu'il est le plus petit des majorants de B.

Autrement dit, $\forall \varepsilon > 0,\ \overset{?}{\exists} t_0 \in B : t_0 > \sup A - \inf A - \varepsilon$

On a, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in A : x_0 > \sup A - \varepsilon/2$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists y_0 \in A : y_0 < \inf A + \varepsilon/2$

Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0, y_0 \in A$: $x_0 - y_0 > \sup A - \inf A - \varepsilon$

D'où, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists t_0 = |x_0 - y_0| \in B$: $t_0 = |x_0 - y_0| \geqslant x_0 - y_0 > \sup A - \inf A - \varepsilon$

$(\sup A - \inf A)$ est le plus petit des majorants de B

Il en résulte, $\sup B = \sup A - \inf A$

(3) $A \subset \mathbb{R}_+^*$ majorée, $A' = \left\{ \frac{1}{x}, x \in A \right\}$

Montrons que : $\inf A' = \frac{1}{\sup A}$

A majorée non vide $\Rightarrow \sup A$ existe

$\forall x \in A$: $x \leqslant \sup A$

Comme $A \subset \mathbb{R}_+^*$ alors $\forall x \in A$: $0 < x \leqslant \sup A$

$\sup A > 0$ $(\sup A \neq 0)$

$\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{\sup A}$, $\forall x \in A$

Donc $\forall t \in A'$: $t \geqslant \frac{1}{\sup A}$

$\left(\frac{1}{\sup A}\right)$ est un minorant de A', Comme $\inf A'$ est le plus grand des minorants de A' alors

$\inf A' \geqslant \frac{1}{\sup A}$ ——— (1)

<u>Remarque</u> : $\inf A'$ existe car $A' \neq \emptyset$ et minorée

En effet, $A \neq \emptyset \Rightarrow A' \neq \emptyset$

$\exists M_1 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in A$: $x \leqslant M_1$ $(M_1 > 0)$

$\exists m_1 = \frac{1}{M_1} \in \mathbb{R}$, $\forall x \in A$: $\frac{1}{x} \geqslant m_1$

$\exists m_1 > 0$, $\forall t \in A'$: $t \geqslant m_1$ (A' minorée)

$\forall t \in A'$: $t \geqslant \inf A'$

$x \in A \subset \mathbb{R}_+^*$ $(x > 0) \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$ $\left(0 < t = \frac{1}{x} \in A'\right)$

$\inf A' \neq 0$. En effet, supposons que $\inf A' = 0$ alors d'après la caractérisation de la borne inférieure

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists t_0 \in A'$: $t_0 < 0 + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_0 \in A$: $x_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ contradiction avec le fait que A est majorée. D'où, $\inf A' \neq 0$

D'après ce qui précède : $\forall x \in A : x \leq \frac{1}{\inf A'}$

$\left(\frac{1}{\inf A'}\right)$ est un majorant de A. Comme $(\sup A)$ est le plus petit des majorants de A, alors on aura :

$$\sup A \leq \frac{1}{\inf A'} \quad \text{ou encore}$$

$$\inf A' \leq \frac{1}{\sup A} \text{ ——— } (2)$$

De (1) et (2) : $\inf A' = \frac{1}{\sup A}$

(4) A, B majorées, $A+B = \{x+y,\ x \in A \text{ et } y \in B\}$

Montrons que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

$\forall x \in A : \quad x \leq \sup A$

$\forall y \in B : \quad y \leq \sup B$

$\forall x \in A, \forall y \in B : x+y \leq \sup A + \sup B$

$\exists M \in \mathbb{R}, \forall t \in A+B : \quad t \leq \underbrace{\sup A + \sup B}_{M}$ $\quad (A+B \text{ majorée})$

$(\sup A + \sup B)$ est un majorant de $A+B$, Reste à montrer qu'il est le plus petit :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists t_0 \in A+B : \quad t_0 > \sup A + \sup B - \varepsilon$

On a, $\forall \varepsilon > 0, \ \exists x_0 \in A : x_0 > \sup A - \varepsilon/2$ ——— (1)

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists y_0 \in B : y_0 > \sup B - \varepsilon/2$ ——— (2)

(1) + (2) $\forall \varepsilon > 0, \ \exists t_0 = x_0 + y_0 \in A+B : t_0 > \sup A + \sup B - \varepsilon$

Donc $\sup A + \sup B$ est le plus petit des majorants de $A+B$.

Il en résulte $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

Remarque $\sup(A+B)$ existe car $A+B \neq \emptyset$ et $A+B$ est majorée

Exercice 02

(1) Montrons que : $\nexists x_0 \in \mathbb{Q} \ / \ x_0^2 = 2$ par l'absurde,

On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{Q}$ tel que $x_0^2 = 2$

$x_0 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{Z} \ (q \neq 0) \ x_0 = \frac{p}{q}, \ p \wedge q = 1$

(On suppose que $\exists p, q \in \mathbb{Z} \ (q \neq 0) \ x_0 = \frac{p}{q}, \ p \wedge q = 1$)

$x_0^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$

p^2 est pair. Montrons que p est pair

par contraposé ($A \Rightarrow B \Leftrightarrow \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$)

$[\underbrace{p^2 \text{ est pair}}_{\text{hypothèse}} \Rightarrow p \text{ est pair}] \Leftrightarrow [\underbrace{p \text{ est impair}}_{\text{hypothèse}} \Rightarrow p^2 \text{ est impair}]$

p est impair $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : p = 2k+1$

$p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k) + 1$

$\exists k' = 2k^2+2k \in \mathbb{Z} \ / \ p^2 = 2k' + 1$

p^2 est impair. il en résulte p est pair

p est pair $\Rightarrow \exists l \in \mathbb{Z} \ / \ p = 2l$

$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Leftrightarrow (2l)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2l^2$

q^2 est pair $\Rightarrow q$ est pair

Donc p et q sont pairs contradiction avec le fait que $p \wedge q = 1$. D'où, $\nexists x_0 \in \mathbb{Q} \ / \ x_0^2 = 2$

(2) $A = \{ r \in \mathbb{Q} \ / \ r^2 < 2 \}$

Montrons que A ne possède pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$

par l'absurde, on suppose que : $\exists x_0 \in \mathbb{Q} \ ; \ x_0 = \sup A$

$x_0 \in A$ ou bien $x_0 \notin A$. ($x_0^2 = 2$ impossible d'après (1))

1er cas $x_0 \in A \Rightarrow x_0^2 < 2 \quad -\sqrt{2} < x_0 < \sqrt{2}$

$x_0 < \sqrt{2} \xrightarrow[\text{de } \mathbb{Q} \text{ dans } \mathbb{R}]{\text{densité}} \exists q \in \mathbb{Q} \ / \ x_0 < q < \sqrt{2}$

$-\sqrt{2} < x_0 < q < \sqrt{2} \Rightarrow q \in A$

$x_0, q \in A$ et $x_0 = \sup A < q$ (contradiction avec la définition de la borne supérieure)

(le fait que $\sup A$ est la borne supérieure de A)

car $\forall x \in A : x \leq \sup A$

2ème cas : $x_0 \notin A$

on note γ_A : l'ensemble des majorants de A

. Si $x_0 \in \gamma_A \Rightarrow x_0 > \sqrt{2}$

$x_0 > \sqrt{2} \xrightarrow[\text{de } \mathbb{Q} \text{ dans } \mathbb{R}]{\text{densité}} \exists q' \in \mathbb{Q} \ / \ \sqrt{2} < q' < x_0$

$x_0, q' \in \gamma_A$ et $q' < x_0 = \sup A$

Contradiction avec le fait que x_0 est le plus petit des majorants de A

Si $x_0 < -\sqrt{2} \Rightarrow \exists q_0 \in A \ / \ q_0 > x_0 = \sup A$

contradiction avec le fait que x_0 est un majorant de A (car $\forall q \in A : q \leq \sup A = x_0$)

D'où, l'ensemble A ne possède pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$

Exercice 03 $A_1 =]-1, 2[$

$A_1 \neq \emptyset$ (car $0 \in A_1$)

$\forall x \in A_1 : -1 < x < 2$ Donc $\forall x \in A_1 : -1 \leq x \leq 2$

A_1 est borné (majoré et minoré)

$A_1 \neq \emptyset$ majoré et minoré $\Rightarrow \sup A_1, \inf A_1$ existent

Montrons que $\sup A_1 = 2$:

2 est un majorant de A_1, reste à montrer qu'il est le plus petit des majorants de A_1 :

Autrement dit, $\forall \varepsilon > 0 \ \overset{?}{\exists} x_0 \in A_1 : x_0 > 2 - \varepsilon$

Si $\varepsilon \geq 2$ (c'est-à-dire $2 - \varepsilon \leq 0$)

Comme $0 \in A_1$ alors il suffit de prendre $x_0 = 0$

Sinon ($0 < \varepsilon < 2$)

$\varepsilon > \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow -\varepsilon < -\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 2 - \varepsilon < 2 - \frac{\varepsilon}{2} < 2$

$-1 < 0 \leq 2 - \varepsilon < \underbrace{2 - \frac{\varepsilon}{2}}_{x_0} < 2 \Rightarrow (2 - \frac{\varepsilon}{2}) \in]-1, 2[= A$

$\exists x_0 = 2 - \frac{\varepsilon}{2} \in A_1$ tel que $x_0 > 2 - \varepsilon$

D'où, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in A_1$ / $x_0 > 2 - \varepsilon$

car $x_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon > 2 \\ 2 - \frac{\varepsilon}{2} & \text{si } 0 < \varepsilon \leq 2 \end{cases}$

2 est le plus petit des majorants de A_1

et en résulte, $\sup A_1 = 2$

<u>Montrons que</u> $\inf A_1 = -1$:

(-1) est un minorant de A_1 ; il reste à montrer qu'il est le plus grand des minorants.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_0 \in A_1$ / $x_0 < -1 + \varepsilon$

Si $\varepsilon > 1$ (C'est-à-dire $0 < -1 + \varepsilon$)

Comme $0 \in A_1$ alors il suffit de prendre $x_0 = 0$

sinon ($0 < \varepsilon \leq 1$)

$\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow -1 + \frac{\varepsilon}{2} < -1 + \varepsilon \leq 0 < 2$

Donc $-1 < \underbrace{-1 + \frac{\varepsilon}{2}}_{x_0} < -1 + \varepsilon < 2 \Rightarrow -1 + \frac{\varepsilon}{2} \in]-1, 2[= A_1$

Il suffit de prendre $x_0 = -1 + \frac{\varepsilon}{2}$

D'où $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_0 \in A_1$ / $x_0 < -1 + \varepsilon$

car $x_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon > 1 \\ -1 + \frac{\varepsilon}{2} & \text{si } 0 < \varepsilon \leq 1 \end{cases}$

-1 est le plus grand des minorants de A_1

et en résulte, $\inf A_1 = -1$

Comme $-1 \notin A_1$ alors $\min A_1$ n'existe pas

$2 \notin A_1$ alors $\max A_1$ n'existe pas.

En effet, on suppose que $\min A_1$, $\max A_1$ existent alors, par définition $\min A_1 = \inf A_1 = -1$ et $-1 \in A_1$

$\max A_1 = \sup A_1 = 2$ et $2 \in A_1$ Contradiction car $-1 \notin A_1$ et $2 \notin$

$A_2 = [1, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$

$A_2 \neq \emptyset$ (car $1 \in A_2$)

$\forall x \in A_2$: $1 \leq x \leq \sqrt{2}$ A_2 est borné (majoré et minoré)

$A_2 \neq \emptyset$ majorée $\Rightarrow$ sup A_2 existe

$A_2 \neq \emptyset$ minoré $\Rightarrow$ inf A_2 existe

~~tous~~ Les éléments de A_2 sont tous minorés par 1 qui est lui même dans A_2 donc $\min A_2 = 1$

$\min A_2$ existe $\Rightarrow \inf A_2 = \min A_2 = 1$

Montrons que $\sup A_2 = \sqrt{2}$:

D'après ce qui précède, $(\sqrt{2})$ est un majorant de A. Il reste à montrer qu'il est le plus petit. Autrement dit,

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists x_0 \in A_2$ tel que $x_0 > \sqrt{2} - \varepsilon$

si $\sqrt{2} - \varepsilon \geq 1$, (c'est à dire $\varepsilon \leq \sqrt{2} - 1$) alors,

$\exists q \in \mathbb{Q}$ tel que : $1 \leq \sqrt{2} - \varepsilon < q < \sqrt{2}$ (car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$)

$q \in [1, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} = A_2$

Donc $\forall \varepsilon \leq \sqrt{2} - 1$, $\exists x_0 = q \in A_2$ tel que $x_0 > \sqrt{2} - \varepsilon$

sinon ($\varepsilon > \sqrt{2} - 1$) càd : $\sqrt{2} - \varepsilon < 1$

comme $1 \in A_2$ alors il suffit de prendre $x_0 = 1$

D'où, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 \in A_2$ tel que $x_0 > \sqrt{2} - \varepsilon$

où $x_0 = \begin{cases} q & \text{si } 0 < \varepsilon \leq \sqrt{2} - 1 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Il en résulte, $\sqrt{2}$ est le plus petit des majorants de A

c'est à dire $\sup A_2 = \sqrt{2}$

$\max A_2$ n'est pas. En effet, supposons que $\max A_2$ existe, alors $\max A_2 = \sup A_2 = \sqrt{2}$ et $\sqrt{2} \in A_2$

Contradiction car $\sqrt{2} \notin A_2$

D'où, $\max A_2 \nexists$

$A_3 = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$

On constate que $A_3 \neq \emptyset$ (car $\exists x_0 = \frac{1}{2} - \frac{0}{0+1} = \frac{1}{2} \in A_3$)

$\forall n \in \mathbb{N} : 2n+1 > 2n \Rightarrow \frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1} > 0$

$\forall n \in \mathbb{N} : 2n+1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{2n+1} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \frac{1}{2(2n+1)} \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \frac{1+2n-2n}{2(2n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1} \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1} \leq \frac{1}{2}$

Il en résulte, $\forall x \in A_3 : 0 < x \leq \frac{1}{2}$

Ce qui montre que A_3 est borné (majoré et minoré)

$A_3 \neq \emptyset$ majoré $\Rightarrow \sup A_3$ existe

$A_3 \neq \emptyset$ minoré $\Rightarrow \inf A_3$ existe

Les éléments de A_3 sont tous majorés par $\frac{1}{2}$ qui appartient lui même à A_3 alors $\max A_3 = \frac{1}{2}$ (existe)

Ce qui entraîne que $\sup A_3 = \max A_3 = \frac{1}{2}$.

Montrons que $\inf A_3 = 0$:

D'après ce qui précède, 0 est un minorant de A_3

il reste à montrer qu'il est le plus grand.

Pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in A_3$ tel que $x_0 < 0 + \varepsilon$

On cherchera x_0 sous la forme $x_0 = \frac{1}{2} - \frac{n_0}{2n_0+1}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$. Et l'existence de n_0 entraîne celle de x_0

$x_0 < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{n_0}{2n_0+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{4n_0+2} < \varepsilon \Leftrightarrow n_0 > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$

Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $k_0 > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$

Il suffit de prendre $n_0 = k_0$

Montrons que $\min A_3$ n'existe pas, pour le faire, on procède par l'absurde en supposant que $\min A_3$ existe, alors on a forcément $\min A_3 = \inf A_3 = 0$ et $0 \in A_3$

$0 \in A_3 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1} = 0$

$\frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2(2n+1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2n+1} = 0$ (impossible)

D'où, $\min A_3$ n'existe pas.

$A_4 = \left\{ \frac{x\sqrt{2}}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$

$A_4 \neq \emptyset$ (car $\exists x_0 = \frac{\sqrt{2}}{(1)^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \in A_4$) (pour $x = 1 \in \mathbb{R}_+^*$)

$\forall X \in A_4 : X > 0$ (car $X = \frac{x\sqrt{2}}{x^2+1} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$)

On a, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-1)^2 \geq 0$

$(x-1)^2 = x^2+1-2x \geq 0 \Leftrightarrow x^2+1 \geq 2x \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{2}x}{x^2+1} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

D'où, $\forall X \in A_4 :\ 0 < X \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

A_4 est borné (majoré et minoré)

$A_4 \neq \emptyset$ majoré $\Rightarrow \sup A_4$ existe

$A_4 \neq \emptyset$ minoré $\Rightarrow \inf A_4$ existe

Les éléments de A_4 sont tous majorés par $\frac{\sqrt{2}}{2}$ qui appartient lui même à A_4, alors $\max A_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (existe)

Ce qui entraîne que $\sup A_4 = \max A_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

<u>Montrons que $\inf A_4 = 0$</u> 0 est un minorant de A_4 reste à montrer qu'il est le plus grand.

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists X_0 \in A_4$ tel que $X_0 < \varepsilon$

On cherchera X_0 sous la forme $X_0 = \frac{x_0\sqrt{2}}{x_0^2+1}$, $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$

Et l'existence de x_0 entraîne celle de X_0

Soit $\varepsilon > 0$ pour $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, comme $\frac{x_0\sqrt{2}}{x_0^2+1} < \frac{x_0\sqrt{2}}{x_0^2} = \frac{\sqrt{2}}{x_0}$

alors pour avoir $\frac{x_0\sqrt{2}}{x_0^2+1} < \varepsilon$, il suffit d'avoir $\frac{\sqrt{2}}{x_0} < \varepsilon$,

<u>c.à.d</u> $x_0 > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$. On peut prendre donc $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} + 1$

D'où, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} + 1\right) \in \mathbb{R}_+^*$: $\frac{x_0\sqrt{2}}{x_0^2+1} < \varepsilon$

Il en résulte, $\inf A_4 = 0$.

Min A_4 n'existe pas. En effet, supposons que $\min A_4$ existe alors $\min A_4 = \inf A_4 = 0$ et $0 \in A_4$

$0 \in A_4 \Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\frac{x_0\sqrt{2}}{x_0^2+1} = 0$

$\Leftrightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x_0 = 0$ (contradiction) (impossible)

D'où, $\min A_4 \nexists$

$A_5 = \left\{ \sin\left(\frac{2n\pi}{7}\right), n \in \mathbb{Z} \right\} = \{ f(n), n \in \mathbb{Z} \}$ où $f(x) = \sin\left(\frac{2x\pi}{7}\right)$

$A_5 \neq \emptyset$ car $0 \in A_5$ (pour $n = 0 \in \mathbb{Z}$)

$\forall n \in \mathbb{Z} : -1 \leq \sin\left(\frac{2n\pi}{7}\right) \leq 1$

Donc, $\exists M = 1 \in \mathbb{R}$, $\exists m = -1 \in \mathbb{R} / \forall x \in A_5 : -1 \leq x \leq 1$

A_5 est borné $\Leftrightarrow A_5$ est majoré et minoré

$A_5 \neq \emptyset$ majoré $\Rightarrow \sup A_5$ existe

$A_5 \neq \emptyset$ minoré $\Rightarrow \inf A_5$ existe

A_5 est discret. De plus, l'application $f : x \mapsto \sin\left(\frac{2x\pi}{7}\right)$ est périodique de période 7. En effet,

$f(n+7) = \sin\left(\frac{2(n+7)\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{2n\pi}{7} + 2\pi\right) = \sin\frac{2n\pi}{7}$

Ce qui entraîne que :

$$A_5 = \left\{ \sin 0, \sin\frac{2\pi}{7}, \sin\frac{4\pi}{7}, \sin\frac{6\pi}{7}, \sin\frac{8\pi}{7}, \sin\frac{10\pi}{7}, \sin\frac{12\pi}{7} \right\}$$

qui est visiblement fini

$\max A_5 = \sin\frac{4\pi}{7}$ existe $\Rightarrow \sup A_5 = \max A_5 = \sin\frac{4\pi}{7}$

$\min A_5 = -\sin\frac{4\pi}{7} = \sin\frac{10\pi}{7} \Rightarrow \inf A_5 = \min A_5 = \sin\frac{10\pi}{7}$

$(\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha)$

$\sin\left(2\pi - \frac{4\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{10\pi}{7}\right) = -\sin\frac{4\pi}{7}$