Université A. Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

1$^{\text{ère}}$ année MI
Année universitaire
2018/2019

CORRIGÉ DE LA SÉRIE - TD N° 3

☞ **Rappel :** Si f est une fonction bornée et intégrable sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$: Somme de Riemann associée à une subdivision régulière $\delta=(a_k)$, où

$$\left(a_k = a+k.\frac{b-a}{n},\ k=0,...,n\right),$$

de l'intervalle $[a,b]$ pour la fonction f.

Solution 1.

1) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)}$, *on remarque que cette somme est sous forme*

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k).$$

Posons $[a,b]=[0,1]$, *donc*

$$a_k = a+k.\frac{b-a}{n} = \frac{k}{n}.$$

Posons $a_k = t$. *On a*

$$f(a_k) = \frac{1}{(1+a_k)} \Longrightarrow f(t) = \frac{1}{(1+t)}.$$

Comme f *est continue sur* $[0,1]$, *donc* f *est intégrable sur* $[0,1]$. *D'où*

$$\boxed{\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dt}{t+1} = [\ln|t+1|]_0^1 = \ln 2.}$$

2) $U_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$. *Posons*

$$W_n = \ln(U_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right).$$

Posons $[a,b]=[0,1]$, *donc*

$$a_k = a+k.\frac{b-a}{n} = \frac{k}{n}.$$

Posons $a_k = t$. *On a*

$$f(a_k) = \ln\left(1+a_k^2\right) \Longrightarrow f(t) = \ln\left(1+t^2\right).$$

Comme f *est continue sur* $[0,1]$, *donc elle est intégrable sur* $[0,1]$. *D'où*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} W_n = \int_0^1 \ln\left(1+t^2\right)dt.$$

Date: **Dimanche, le 26 Mai 2018.**

Pour calculer cette intégrale (on intègre par parties). Posons

$$h'(t) = 1 \ \textit{et} \ g(t) = \ln\left(1+t^2\right), \ \textit{donc} \ h(t) = t \ \textit{et} \ g'(t) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow+\infty} W_n &= \int_0^1 \ln\left(1+t^2\right) dt = \left[t.\ln\left(1+t^2\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2} dt \\ &= \ln 2 - \int_0^1 \left(\frac{2t^2+2}{1+t^2} - \frac{2}{1+t^2}\right) dt = \ln 2 - \left[2t - 2.\arctan t\right]_0^1 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

On a

$$\boxed{W_n = \ln(U_n) \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} W_n = \ln\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} U_n\right) \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} U_n = e^{\lim_{n\longrightarrow+\infty} W_n} = 2e^{-2+\frac{\pi}{2}}.}.$$

Solution 2.

1) *Calcul de l'intégrale I_1, où $I_1 = \int (\ln x)^2 \, dx$. On intègre par parties deux fois.*
La première intégration par parties. Posons

$$f'(x) = 1 \ \textit{et} \ g(x) = (\ln x)^2, \ \textit{donc} \ f(x) = x \ \textit{et} \ g'(x) = 2\frac{\ln x}{x},$$

donc

$$I_1 = x.(\ln x)^2 - 2\int \ln x \ dx.$$

Pour calculer $\int \ln x \ dx$, on intègre par parties une deuxième fois. Posons

$$f'(x) = 1 \ \textit{et} \ g(x) = \ln x, \ \textit{donc} \ f(x) = x \ \textit{et} \ g'(x) = \frac{1}{x},$$

donc

$$\int \ln x \ dx = x.\ln x - \int dx = x.\ln x - x + C, \ \textit{où} \ C \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$I_1 = x.(\ln x)^2 - 2x.\ln x + 2x + C, \ \textit{où} \ C \in \mathbb{R}.$$

2) *Calcul de l'intégrale I_2, où $I_2 = \int \arcsin x \ dx$. On intègre par parties. Posons*

$$f'(x) = 1 \ \textit{et} \ g(x) = \arcsin x, \ \textit{donc} \ f(x) = x \ \textit{et} \ g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

D'où

$$\begin{aligned}I_2 &= x.\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x.\arcsin x + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x.\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C, \ \textit{où} \ C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Solution 3.

Calcul de l'intégrale J_3, où $J_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$. Pour calculer cette intégrale, en utilisant la relation de récurrence suivante

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ 2kI_{k+1} = \frac{x}{(1+x^2)^k} + (2k-1) I_k, \ \textit{où} \ I_k = \int \frac{dx}{(1+x^2)^k}. \tag{1}$$

On remplace dans la relation (1), k par 1, on obtient

$$2I_2 = \frac{x}{1+x^2} + I_1 \Longrightarrow 2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{1+x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + \arctan x + C \ \textit{où} \ C \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$J_3 = \frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2}\arctan x + C, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

Calcul de l'intégrale J_1*, où* $J_1 = \int \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{x^2}\,dx$*. Posons* $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$*.*

$$t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \Longrightarrow t^2 = \frac{x-1}{x+1} \Longrightarrow xt^2 + t^2 = x - 1 \Longrightarrow t^2 + 1 = x\left(1-t^2\right) \Longrightarrow x = \frac{1+t^2}{1-t^2},$$

donc

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4t}{\left(1-t^2\right)^2} \Longrightarrow dx = \frac{4t}{\left(1-t^2\right)^2}\,dt.$$

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int \frac{4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt = 4\int \frac{\left(t^2+1\right)-1}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt,\\
&= \int \frac{4}{1+t^2}\,dt - 4\int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^2} = 2.\arctan t - \frac{2t}{\left(1+t^2\right)} + C, \text{ où } C \in \mathbb{R},\\
&= 2.\arctan\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.\frac{x+1}{x} + C, \text{ où } C \in \mathbb{R} \ (voir\, J_3).
\end{aligned}$$

Calcul de l'intégrale J_2*, où* $J_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$*. Posons* $t = \sqrt{e^x+1}$*.*

$$t = \sqrt{e^x+1} \Longrightarrow t^2 = e^x + 1 \Longrightarrow e^x = t^2 - 1 \Longrightarrow x = \ln\left(t^2-1\right) \Longrightarrow dx = \frac{2t}{t^2-1}\,dt.$$

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int \frac{2}{t^2-1}\,dt = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \ln|t-1| - \ln|t+1| + C, \text{ où } C \in \mathbb{R},\\
&= \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C, \text{ où } C \in \mathbb{R},\\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + C, \text{ où } C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Calcul de l'intégrale J_4*, où* $J_4 = \int \frac{dx}{x^2+2x+3}$*. On a*

$$x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2,$$

donc

$$J_4 = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}.$$

Pour calculer cette intégrale. On pose $z = \frac{x+1}{\sqrt{2}}$*.*

$$z = \frac{x+1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow x = \sqrt{2}z - 1 \Longrightarrow dx = \sqrt{2}dz,$$

donc

$$\begin{aligned}
J_4 &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{z^2+1},\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan z + C, \text{ où } C \in \mathbb{R},\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C, \text{ où } C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Solution 4.

Calcul de K_1, *où* $K_1 = \int \frac{x^4+1}{x^2+3x-4}\,dx$.

La fraction $\frac{x^4+1}{x^2+3x-4}$ *est irrégulière* $(\deg P \geq \deg Q)$. *En utilisant d'abord la division euclidienne on obtient*

$$\frac{x^4+1}{x^2+3x-4} = x^2-3x+13+\frac{-51x+53}{x^2+3x-4},$$

donc

$$K_1 = \int \left(x^2-3x+13\right)dx + \int \frac{-51x+53}{x^2+3x-4}\,dx.$$

On a

$$\int \left(x^2-3x+13\right)dx = \frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+13x+C_1,\ \text{où } C_1\in\mathbb{R}.$$

Reste à calculer $\int \frac{-51x+53}{x^2+3x-4}\,dx$. *On remarque que la fraction* $\frac{-51x+53}{x^2+3x-4}$ *est régulière* $(\deg P < \deg Q)$, *donc en utilisant la décomposition en éléments simples.*

a) *Factoriser* x^2+3x-4 *par un produit des polynômes irréductibles.*

$$x^2+3x-4 = (x-1).(x+4).$$

b) *La forme de la décomposition*

$$\frac{-51x+53}{x^2+3x-4} = \frac{-51x+53}{(x-1).(x+4)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+4}.$$

Calcul de a . *En multipliant les deux côtés par* $(x-1)$, *puis on remplace* x *par* 1, *on trouve que*

$$\boxed{\boxed{a=\tfrac{2}{5}.}}$$

Calcul de b. *En multipliant les deux côtés par* $(x+4)$, *puis on remplace* x *par* -4, *on trouve que*

$$\boxed{\boxed{b=-\frac{257}{5},}}$$

donc

$$\frac{-51x+53}{(x-1).(x+4)} = \frac{2}{5(x-1)}-\frac{257}{5(x+4)}.$$

$$\int \frac{-51x+53}{(x-1).(x+4)}\,dx = \int \frac{2}{5(x-1)}\,dx - \int \frac{257}{5(x+4)}\,dx = \frac{2}{5}\ln|x-1| - \frac{257}{5}\ln|x+4| + C_2,\ C_2\in\mathbb{R}.$$

D'où

$$K_1 = \frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+13x+\frac{2}{5}\ln|x-1|-\frac{257}{5}\ln|x+4|+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Calcul de K_2. *On a*

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x^2+2x+3)(x-1)(x+3)} = \frac{ax+b}{x^2+2x+3}+\frac{c}{x-1}+\frac{d}{x+3} \qquad (2)$$

Calcul de c. *En multipliant les deux côtés de (2) par* $(x-1)$, *on obtient*

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x^2+2x+3)(x+3)} = \frac{ax+b}{x^2+2x+3}(x-1)+c+\frac{d}{x+3}(x-1),$$

puis, on remplace x *par* 1, *donc*

$$\boxed{\boxed{c=1.}}$$

Calcul de d. *En multipliant les deux côtés de (2) par* $(x+3)$, *on obtient*

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x^2+2x+3)(x-1)} = \frac{ax+b}{x^2+2x+3}(x+3)+\frac{c}{x-1}(x+3)+d,$$

puis, on remplace x par -3, donc

$$\boxed{d=1.}$$

***Calcul de** a. En multipliant les deux côtés de (2) par x, on obtient*

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x^2+2x+3)(x-1)(x+3)}x=\frac{ax^2+bx}{x^2+2x+3}+\frac{cx}{x-1}+\frac{dx}{x+3} \tag{3}$$

Puis par passage à la limite quand x tend vers $+\infty$, on obtient, $a+c+d=0$.
$a+c+d=0 \Longleftrightarrow a+2=0 \Longleftrightarrow \boxed{a=-2}$.

***Calcul de** b. On remplace x par 0 dans (2), on obtient*

$$1=\frac{b}{3}-c+\frac{d}{3} \Longleftrightarrow \frac{d}{3}=1-\frac{b}{3}+c \Longleftrightarrow \frac{b}{3}=1-\frac{d}{3}+c \Longleftrightarrow b=3-d+3c \Longleftrightarrow \boxed{b=5}.$$

Donc

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x^2+2x+3)(x-1)(x+3)}=\frac{-2x+5}{x^2+2x+3}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3},$$

donc

$$K_2=\int\frac{-2x+5}{x^2+2x+3}\,dx+\int\frac{1}{x-1}\,dx+\int\frac{1}{x+3}\,dx.$$

On a

$$\begin{aligned}\int\frac{-2x+5}{x^2+2x+3}\,dx &= -\int\frac{(2x+2)-2-5}{x^2+2x+3}\,dx,\\ &= -\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx+7\int\frac{dx}{x^2+2x+3},\\ &= \ln|x^2+2x+3|+7\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C_1,\ \text{où } C_1\in\mathbb{R}\ (\text{voir} J_4).\end{aligned}$$

D'où

$$K_2=\ln\left|x^2+2x+3\right|+7\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+\ln|x-1|+\ln|x+3|+C,\ \text{où } C\in\mathbb{R}.$$

Solution 5.

Calcul de L_1, où $L_1=\int\cos^2 x\,dx$. On a

$$L_1=\int\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C,\ \text{où } C\in\mathbb{R}.$$

Calcul de L_2, où $L_2=\int\frac{dx}{1+\sin x}$. Posons $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, donc

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}\ \text{et}\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}.$$

$$L_2=2\int\frac{dt}{(1+t)^2}=-\frac{2}{1+t}+C=-\frac{2}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}+C,\ \text{où } C\in\mathbb{R}.$$

Calcul de L_3, où $L_3=\int\sin^3 x.\cos^3 x.dx$. On a

$$L_3=\int\sin x.\sin^2 x.\cos^3 x.dx=\int\sin x.\left(1-\cos^2 x\right).\cos^3 x.dx,$$

cette intégrale est sous forme $\int f(\cos x).\sin x.dx$, donc posons $t=\cos x$.

$$t=\cos x\Longrightarrow dt=-\sin x.dx\Longrightarrow \sin x.dx=-dt.$$

$$\begin{aligned}\int \sin x.\left(1-\cos^2 x\right).\cos^3 x.dx &= \int \left(t^2-1\right)t^3dt = \int \left(t^5-t^3\right)dt = \frac{t^6}{6}-\frac{t^4}{4}+C,\ \text{où } C\in\mathbb{R}.\\ &= \frac{\cos^6 x}{6}-\frac{\cos^4 x}{4}+C,\ \text{où } C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Doù

$$L_3 = \frac{\cos^6 x}{6}-\frac{\cos^4 x}{4}+C,\ \text{où } C\in\mathbb{R}.$$

Calcul de l'intégrale L_4, *où* $L_4 = \int \sin^{2019} x.\cos x.dx$. *Cette intégrale est sous forme* $\int f(\sin x).\cos x.dx$, *donc posons* $t=\sin x$

$$t=\sin x \Longrightarrow dt=\cos x.dx,$$

donc

$$L_4 = \int t^{2019}.dt = \frac{t^{2020}}{2020}+C = \frac{\sin^{2020} x}{2020}+C,\ \text{où } C\in\mathbb{R}.$$

Solution 6.

La résolution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

a) *La résolution de l'équation sans second membre* (E_0).

$$y'-\frac{y}{t}=0 \tag{E_0}$$

$$y'-\frac{y}{t}=0 \Longrightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{y}{t} \Longrightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dt}{t} \Longrightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dt}{t} \Longrightarrow \ln|y|=\ln|t|+C,\ \text{où } C\in\mathbb{R},$$

donc

$$|y| = e^C\,|t|,\ \text{où } C\in\mathbb{R}.$$

Donc

$$y=\lambda.t,\ \text{où } \lambda\in\mathbb{R}^*.$$

Comme $y=0$ *est une solution de* (E_0). *D'où*

$$y_0=\lambda.t\ \text{où } \lambda\in\mathbb{R}.$$

b) *On cherche, une solution particulière de l'équation complète* (E) *notée* y_p

$$y'-\frac{y}{t}=2t.\arcsin t \tag{E}$$

Pour trouver cette solution particulière y_p *de l'équation* (E), *on utilise la méthode de la variation de la constante. Posons*

$$y_p=\lambda(t).t$$

y_p *est une solution de* $(E) \Longleftrightarrow \lambda'(t).t+\lambda(t)-\lambda(t)=2t.\arcsin t \Longleftrightarrow \lambda'(t)=2\arcsin t$, *donc*

$$\lambda(t)=2.\int \arcsin t.dt = 2t.\arcsin t+2\sqrt{1-t^2}+C,\ \text{où } C\in\mathbb{R}\ (voir I_2),$$

donc

$$y_p=2t^2.\arcsin t+2t\sqrt{1-t^2}.$$

D'où

$$y=y_0+y_p=\lambda.t\ +2t^2.\arcsin t+2t\sqrt{1-t^2},\ \text{où } \lambda\in\mathbb{R}.$$