M1_AM : Module Analyse numérique 2 (1 Cours + 1 TD + 1 TP)
(Enseignant : N. AKROUNE)

Intitulé : Résolution numérique de Problèmes de Valeurs aux limites
(Numerical Solutions of Boundary Value Problems)

Partie 1 : Rappels et généralités sur les Equations aux dérivées partielles (E.D.P)
- classification des EDP (degré, linéarité, paraboliques, elliptiques, hyperboliques, ...)

- Conditions aux limites : Dirichlet, Neumann, Mixte.
  . Présentation et utilités
  . Existence et unicité de la solution du Problème.

Partie 2 : Présentation et principe de la méthode des différences finies (M.D.F)
. Dérivation numérique dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$
. Cas unidimensionnel
. Cas bidimensionnel - Notations et généralisation.
. Exemples d'Applications.

Partie 3 : MDF et équations aux EDP Classiques
. Equations de : la chaleur ; des Ondes ; de Poisson
. Dimensions 1 et 2

Partie 4 : Eléments finis d'ordre 1 et 2.
- Présentation
- Méthode des Eléments finis (M.E.F) + Variantes
- Application de la M.E.F en dim un à l'équation de la chaleur.

#

inférieur ($<$) à l'ordre de l'EDP, i.e : ici ($m=2$)

$(\cdot) = (x, y; u, u_x, u_y)$, cette EDP est <u>QUASI</u>-LINEAIRE.

iii) si $(\cdot) = (x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$, on est dans le cas non-linéaire (strict).

Les exemples ci-dessus sont (resp.) : linéaire, q. lin, n. liné.

Classification des EDP linéaires du 2è ordre dans $\mathbb{R}^2$.

$$a \cdot u_{xx} + 2b\, u_{xy} + c\, u_{yy} + d \cdot u_x + e \cdot u_y + \alpha(\cdot)\, u + g(\cdot) = 0$$

où a, b, c, d, e, α et g sont des constantes ou des fctns de x/y.

si $g \equiv 0$, l'EDP est dite homogène.

Il existe trois formes canoniques suivant a, b et c

1) Si $b^2 - ac < 0$, l'EDP est dite elliptique
2) Si $b^2 - ac = 0$, " " Parabolique
3) Si $b^2 - ac > 0$, l'EDP est hyperbolique

cf { cours de géométrie différentielle

Cette distinction permet de choisir la M.N appropriée pour résoudre l'E.D.P.

Exemples classiques :

1) $\Delta u(x,y) = u_{xx} + u_{yy} = (0 \text{ ou } f)$ Laplace - Poisson → elliptique
2) Eq. de la chaleur : $u = u(x,t)$, $u_t = \alpha\, u_{xx}$ $(\alpha > 0)$
Parabolique
3) $\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}$ $(\alpha \neq 0)$, Hyperbolique (ici : Wave equation)
4) $(y^2-1)\, u_{xx} + 2x\, u_{xy} - u_{yy} + 2 = 0$, $b^2 - ac =$ Eq du $C(0,1)$.

→ Suites : Conditions aux limites (C.L)

(Trois types : C.L. de type Dirichlet, de type Neumann, et de type mixte (Dirichlet-Neumann)).

Partie 1 : Résolution Numérique des EDP.

Une EDP est la donnée d'un domaine $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ dans lequel on cherche une fonction dépendante (i.e : inconnue) u vérifiant une équation de la forme :

$$u : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$X = (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow u(X)$$

$$L\left(X, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right) = 0 \quad , \text{avec} \left| \begin{array}{l} u \in C^m(\mathcal{U}) \\ i = \overline{1,n} \ , m \geq 1 \end{array} \right.$$

Ces équations sont classées suivant leur (ordre, linéarité, Conditions aux limites - ou frontières - de $\mathcal{U}$).

L'ordre d'une EDP est l'entier m le plus élevé dans la différentiation de u.

ex : ds les exemples qui suivent, $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $X = (x, y)$

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = x y^2$, 2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - (x+y) u + 1 = 0$

3) $\left(\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)^2 + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial u}{\partial x} + 3u = 0$

l'ordre m vaut (resp.) 1, 2 et 3.

Linéarité d'une EDP : On introduit cette notion à travers un type d'EDP de 2ᵉ ordre dans le plan.

$$a(\cdot)\, u_{xx} + 2\, b(\cdot)\, u_{xy} + c(\cdot)\, u_{yy} + \underbrace{d(\cdot)}_{\text{i.e: } \alpha(\cdot) u_x + \beta(\cdot) u_y + \gamma(\cdot) u + g(\cdot)} = 0$$

où a, b, c et d sont des fonctions réelles.

Suivant qu'elles soient des

i) Constantes, ou fonctions seulement de x et/ou y, alors l'EDP est dite LINEAIRE

ii) fonctions de x et/ou y, et des fonctions de u d'ordre

Département de Mathématiques / MI
$1^{ère}$ année Master (2019/2020) – Analyse numérique II

Série d'exercices (EDP/MDF) N° 1.

Ex. 1 :

Soit $a \in R$, utiliser les coordonnées polaires pour déterminer les fonctions u = u(x,y) de classe $C^1(R^2)$ qui vérifient :

$$x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = a \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ex. 2 :

Soit u=u(x,y): $D=\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(D)$, et notons par $\mathcal{L}$ l'opérateur

$$\mathcal{L}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - u$$

i) L'opérateur $\mathcal{L}$ est-il linéaire ?

ii) En utilisant la méthode de la séparation des variables (MSV), trouver la forme générale des solutions de l'EDP : $\mathcal{L}(u)=0$.

iii) En déduire la solution particulière u telle que :

$u(x, 0) = 3 \cdot \exp(-5 \cdot x) + 2 \cdot \exp(-3 \cdot x)$.

Ex. 3 : soit f=f(x, y) une fonction réelle sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$.

Résoudre l'EDP : $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Poser u = xy et v = x/y.

Ex. 4 : Trouver la solution u=u(x, t), du problème aux limites suivant, à l'aide de la *MSV* :

$$\begin{cases} u: [0,1] \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ u_t = u_{xx}, \ 0 < x < 1, \ t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \ t > 0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x), \ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Ex. 5 :

Considérons le problème différentiel aux limites d'ordre deux suivant :

$$\begin{cases} u : I = [0, 1] \to R, \quad de\ classe\ C^2. \\ u'' - u = 0 \quad sur\ ]0, 1[\\ u(1) = u(0) - 1 = 0 \end{cases}$$

- Résoudre analytiquement ce problème.
- Quel système linéaire obtient-on lorsqu'on prend ($n \in \mathbb{N}^*$) subdivisions de I ? Etudier son inversibilité.
- En choisissant un pas de discrétisation $h = 1/2$, trouver par la *méthode aux différences finies*, la valeur numérique de la fonction u au point $x = 0.5$.
- Calculer l'erreur relative commise en ce point par la *MDF*.

Ex. 6 :

Considérons cette fois le problème :

$$\begin{cases} u : [0,1] \to R, \quad de\ classe\ C^2. \\ u'' - 2u' + u = x \quad sur\ ]0, 1[\\ (C.L.D) : u(0) = u(1) - 1 = 0 \end{cases}$$

i) Résoudre analytiquement.

ii) En prenant un pas de discrétisation $h = 1/2$, trouver par la *méthode aux différences finies*, les valeurs numériques de la fonction u au point $x = 0.5$ en prenant successivement les trois approximations (DFS, DFP et DFR) pour la dérivée premiere.

iii) Calculer/comparer les erreurs relatives obtenues.

Ex. 7 :

Même question que (Ex. 6) ci-dessus, mais en ayant des conditions aux limites de type *Neumann*, i.e.: $u'(0) = u'(1) - 1 = 0$.