Université A. MIRA - Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques
Enseignant : BERBOUCHA Ahmed

Cours de Master 1
Module : Stabilité des Solutions d'EDO

Première partie :

I) Stabilité au sens de Liapounov :

1.1) Introduction :

Soit $x(t; t_0, x_0)$ une solution d'une équation différentielle représentant un phénomène physique ou l'évolution d'un système quelconque. Il existe toujours deux causes d'incertitude sur les conditions initiales. En effet, quand on tente de répéter une expérience donnée, la reproduction des conditions initiales n'est jamais entièrement fidèle. De plus, même si on ne considère qu'une seule expérience, les conditions initiales sont connues par des mesures forcément entachées d'erreurs. Il est donc fondamental de pouvoir reconnaître les circonstances dans lesquelles de petites variations des conditions initiales n'introduiront que de petites variations dans la suite du phénomène.

1.2) Stabilité et attractivité d'un équilibre :

Soit, un intervalle, $I =]\tau, +\infty[$, où τ peut être égal à $-\infty$; et pour un ρ strictement positif ou infini, une boule ouverte $B_\rho \subset \mathbb{R}^n$, centrée à l'origine et de rayon ρ. On considère une fonction $f : I \times B_\rho \to \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, continue et localement lipschitzienne en x, et l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \qquad (I.1)$$

Nous désignerons sa solution générale exprimée en fonction des conditions initiales par

$$x : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n \ ; \ (t; t_0, x_0) \mapsto x(t; t_0, x_0).$$

On supposera que pour tout $t \in I$, $f(t, 0) = 0$. Il en résulte que la solution identiquement nulle est un point critique pour $(I.1)$. (On appelle souvent cette solution, l'origine).

Remarque :

Pour étudier la stabilité d'une solution constante non nulle, on pourra l'amener à l'origine par une translation d'axes.

Définition 1.2.1 :

On dit que l'origine est **stable** si,

$(\forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < \rho)(\forall t_0 \in I)(\exists \eta(\varepsilon, t_0) > 0), (\forall x_0 : \|x_0\| < \eta)$ $(\forall t \geq t_0 : t \in J(t_0, x_0); \|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$.

Proposition 1.2.2 :

L'origine est stable si, et seulement si,

$(\forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < \rho)(\forall t_0 \in I)(\exists \eta(\varepsilon, t_0) > 0), (\forall x_0 : \|x_0\| < \eta), \forall t \geq t_0,\ x(t; t_0, x_0)$ est définie et $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$.

Démonstration :

La condition suffisante est évidente.

La condition nécessaire résulte de ce que la stabilité empêche la solution issue de x_0 de s'approcher de la frontière de $I \times B_\rho$ pour des $t \geq t_0$. Donc cette solution est indéfiniment prolongeable vers la droite.

Définition 1.2.3 :

L'origine est dite :

a) **uniformément stable(u.s)** si, la quantité η mentionnée dans la définition de la stabilité est indépendante de t_0, ou plus précisément si,

$(\forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < \rho)(\exists \eta(\varepsilon) > 0)(\forall t_0 \in I), (\forall x_0 : \|x_0\| < \eta)(\forall t \geq t_0 : t \in J(t_0, x_0); \|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$.

b) **attractive** si, $(\forall t_0 \in I)(\exists \delta(t_0) > 0), (\forall x_0 : \|x_0\| < \delta), x(t; t_0, x_0)$ est définie pour tout $t \geq t_0$ et tend vers zéro quand t tend vers l'infini $(+\infty)$.

On peut modifier la fin de cette définition, de telle sorte qu'elle prenne la forme équivalente :

$(\forall t_0 \in I)(\exists \delta(t_0) > 0), (\forall x_0 : \|x_0\| < \delta), x(t; t_0, x_0)$ est définie pour tout $t \geq t_0$ et $(\forall \gamma \geq 0)(\exists T(t_0, x_0, \gamma) > 0)(\forall t \geq t_0 + T), \|x(t; t_0, x_0)\| < \gamma$.

c) **uniformément attractive** si, $(\exists \delta > 0)(\forall t_0 \in I)(\forall x_0 : \|x_0\| < \delta), x(t; t_0, x_0)$ est définie pour tout $t \geq t_0$ et tend vers zéro uniformément en t_0 et x_0 quand t tend vers l'infini $(+\infty)$.

Ici aussi, on peut écrire cette définition de telle sorte qu'on voit plus clairement comment elle se tire de la précédente par un réaménagement des quantificateurs. On obtient :

$(\exists \delta > 0)(\forall \gamma \geq 0)(\exists T(\gamma) > 0)(\forall t_0 \in I)(\forall x_0 : \|x_0\| < \delta), x(t; t_0, x_0)$ est définie pour tout $t \geq t_0$ et $(\forall t \geq t_0 + T(\delta)), \|x(t; t_0, x_0)\| < \gamma$.

d) **asymptotiquement stable(a.s)** si, elle est stable et attractive.

e) **uniformément asymptotiquement stable(u.a.s)** si, elle est uniformément stable et uniformément attractive.

f) **instable** si, elle n'est pas stable. L'origine est donc instable si :

$(\exists \varepsilon : 0 < \varepsilon < \rho)(\exists t_0 \in I)(\forall \eta > 0),\ (\exists x_0 : \|x_0\| < \eta)(\exists t \geq t_0 : t \in J(t_0, x_0); \|x(t; t_0, x_0)\| \geq \varepsilon$.

Remarque 1.2.4

Il ne faut pas croire que l'attractivité implique la stabilité et donc aussi la stabilité asymptotique. Il existe des équations différentielles pour lesquelles l'origine est à la fois attractive est instable.

Remarque 1.2.5

Les définitions précédentes peuvent être réaménagées de manière à définir la stabilité, attractivité,.....d'une solution $x(t; t_0, x_0)$.

Par exemple nous dirons que la solution $x(t; t_0, x_0)$ de l'équation différentielle $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x)$ est stable (au sens de Liapounov) si

$(\forall \varepsilon > 0)(\forall t_0 \in I)(\exists \eta(\varepsilon, t_0) > 0)$, $(\forall x_1 : \|x_1 - x_0\| < \eta)(\forall t \geq t_0 : t \in J(t_0, x_0) \cap J(t_0, x_1))$; $\|x(t; t_0, x_0) - x(t; t_0, x_1)\| < \varepsilon$.

Stabilité et points stationnaires :

On peut toujours ramener l'étude de la stabilité d'une solution d'une équation différentielle, à celle de la stabilité, pour une autre équation, de la solution identiquement nulle.

* Soit

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \qquad (I.2)$$

et $(t_0, x_0) \in I \times B_\rho$ et $x(t; t_0, x_0)$ la solution de $(I.2)$ telle que $x(t_0) = x_0$. A toute solution x on associe une fonction y par la relation

$$y(t) = x(t) - x(t; t_0, x_0).$$

Soit x_1 la valeur pour $t = t_0$ de $x(t)$, la valeur pour $t = t_0$ de la fonction $y(t)$ correspondante est $x_1 - x_0$. Par ailleurs y est la solution de l'équation suivante

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y + x(t; t_0, x_0)) - f(t, x(t; t_0, x_0)) \qquad (I.3)$$

Réciproquement, si y est solution de $(I.3)$, $x(t) = y(t) + x(t; t_0, x_0)$ est la solution de $(I.2)$ telle que $x(t_0) = y(t_0) + x_0$. La solution y qui correspond à $x = x(t; t_0, x_0)$ est $y \equiv 0$.

Proposition 1.2.6

La solution $y \equiv 0$ de $(I.3)$ est stable pour t_0 (resp. u.s ; a.s ou u.a.s) si, et seulement si, la solution $x(t; t_0, x_0)$ est elle même stable pour t_0 (resp. u.s , a.s ou u.a.s).

Démonstration :

Le fait que $y \equiv 0$ soit stable pour t_0 est équivalent à,

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta(\varepsilon, t_0) > 0)$ tq $\|y_0\| < \eta \Rightarrow \|y(t; t_0, y_0)\| < \varepsilon$, $(\forall t \geq t_0 : t \in J(t_0, y_0)$.

Soit aussi bien : $\|x_1 - x_0\| < \eta \Rightarrow \|x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$, $(\forall t \geq t_0 : t \in J(t_0, x_0) \cap J(t_0, x_1))$. Ce qui exprime que $x(t; t_0, x_0)$ est stable pour t_0.

1.3 Fonctions de signe défini ou semi-défini :

Définition 1.3.1

Soit $\tau \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $I =]\tau, +\infty[$ et $B'_\sigma = \{x : \|x\| \leq \sigma\}$.

une fonction

$$V : I \times B'_\sigma \to \mathbb{R} \; ; (t, x) \mapsto V(t, x) \qquad (I.4)$$

continue, telle que $V(t, 0) \equiv 0$ sera dite

- **semi-définie positive** si $\forall (t, x) \in I \times B'_\sigma$, $V(t, x) \geq 0$;
- **semi-définie négative** si $\forall (t, x) \in I \times B'_\sigma$, $V(t, x) \leq 0$;

- de signe semi-défini si elle est soit semi-définie positive soit semi-définie négative.

Définition 1.3.2

Une fonction

$$W : B'_\sigma \to \mathbb{R} \; ; x \mapsto W(x) \qquad (I.5)$$

continue, telle que $W(0) = 0$, sera dite

- définie positive si $\forall x \in B'_\sigma \backslash \{0\} \; ; \; W(x) > 0$

- définie négative si $\forall x \in B'_\sigma \backslash \{0\} \; ; \; W(x) < 0$.

- de signe défini si elle est soit définie positive soit définie négative.

Définition 1.3.3

Une fonction du type $(I.4)$ continue et telle que que $V(t, 0) \equiv 0$ sera dite

-définie-positive s'il existe une fonction W définie positive au sens $(I.5)$, telle que $\forall (t, x) \in I \times B'_\sigma \; , \; V(t, x) \geq W(x)$.

-définie-négative s'il existe une fonction W définie négative au sens $(I.5)$, telle que $\forall (t, x) \in I \times B'_\sigma \; , \; V(t, x) \leq W(x)$.

- de signe défini si elle est soit définie positive soit définie négative.

Exemples et contre exemples :

- La fonction identiquement nulle est semi-définie positive et négative.
- La fonction $x_1^2 + x_2^2$ est définie ou semi-définie positive selon que $B'_\sigma \subset \mathbb{R}^2$ ou $B'_\sigma \subset \mathbb{R}^n$ avec $n > 2$.
- La fonction $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2$ est semi-définie positive pour $B'_\sigma \subset \mathbb{R}^2$, elle s'annule sur toute la droite $x_1 = -x_2$.
- La fonction $\left(x_1^2 + x_2^2\right) e^{-t}$ n'est pas définie-positive pour $B'_\sigma \subset \mathbb{R}^2$, bien qu'elle soit partout strictement positive sauf à l'origine $x_1 = x_2 = 0$. En effet, on ne peut pas trouver de fonction associée $W(x_1, x_2)$ qui soit définie positive.
- La fonction $\left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(1 - e^{a-t}\right)$ est définie positive pour tout $a < \tau$.

Proposition 1.3.4

Une fonction $V : B'_\sigma \to \mathbb{R}$ est définie-positive si, et seulement si, il existe une fonction $\mathbf{a} : [0, \sigma] \to \mathbb{R}$ **;** $r \mapsto \mathbf{a}(r)$, continue, strictement croissante et nulle à l'origine, telle que pour tout $x \in B'_\sigma \; , \; V(x) \geq \mathbf{a}(\|x\|)$.

Démonstration :

La condition suffisante est évidente, du fait que $\mathbf{a}(\|x\|)$ est définie positive. On démontre la condition nécessaire en considérant d'abord la fonction $\mathbf{a}^*(r) = \inf\{V(x) : r \leq \|x\| \leq \sigma\}$, qui est évidemment continue, croissante et strictement positive, sauf à l'origine où elle est nulle. Il reste à montrer que $\mathbf{a}^*(r)$ domine une fonction du type $\mathbf{a}(r)$. Posons $k = \mathbf{a}^*(\sigma)$ et considérons, pour $n = 1, 2, ...,$

$r_n = \sup\{r : \mathbf{a}^*(r) = \dfrac{k}{n}\}$. La suite (r_n) est monotone décroissante. Donc elle tend vers une limite r_0 quand $n \to +\infty$. On ne peut avoir $r_0 > 0$, car dans ce cas, la fonction $\mathbf{a}^*$ étant continue, on aurait $\mathbf{a}^*(r_0) = 0$, ce qui est exclu par hypothèse. De plus pour tout $n = 1, 2, ...,$ on a $r_{n+1} < r_n$, et jamais $r_{n+1} = r_n$, également à cause de la continuité de $\mathbf{a}^*$. Pour $n = 1, 2, ...,$ relions par un segment de droite les points $(r_n, \dfrac{k}{n+1})$ et $(r_{n+1}, \dfrac{k}{n+2})$. La courbe $\mathbf{a}(r)$ cherchée est celle que l'on obtient en considérant tous ces segments bout à bout.

Définition 1.3.5
Nous appellerons fonction de classe K, toute fonction $\mathbf{a} : [0, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ **;**
$r \mapsto \mathbf{a}(r)$, continue, strictement croissante et nulle à l'origine.
Remarque 1.3.6
En rapprochant la proposition 1.3.4 et la définition 1.3.3, on voit que le critère de défini-positivité 1.3.4 s'étend aux fonctions $V : I \times B'_\sigma \rightarrow \boldsymbol{R}$ qui dépendent du temps.

Dérivée temporelle totale d'une fonction le long des solutions d'une équation différentielle.

Considérons une fonction scalaire de classe $\mathcal{C}^1$ du type
$V : I \times B_\rho \rightarrow \mathbb{R}$; $(t, x) \mapsto V(t, x)$. Soit $x(t)$ une solution de $(I.1)$ dont le graphe soit contenu dans $I \times B_\rho$. La dérivée de la fonction $V(t, x(t))$ existe et vaut

$$\dot{V}(t, x(t)) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t))/\frac{dx}{dt}(t)\right) + \frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t)).$$

En remplaçant $\dfrac{dx}{dt}(t)$ par sa valeur $f(t, x(t))$, on obtient

$$\dot{V}(t, x(t)) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t))/f(t, x(t))\right) + \frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t)). \qquad (I.6)$$

On écrira

$$\dot{V}(t, x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}(t, x)/f(t, x)\right) + \frac{\partial V}{\partial t}(t, x). \qquad (I.7)$$

(Le (./.) désigne le produit scalaire).

1.4 Conditions suffisantes de stabilité.

Définition 1.4.1
On dit qu'un ensemble $\Gamma \subset B_\rho$ est positivement invariant si
$(\forall t_0 \in I)(\forall x_0 \in \Gamma)(\forall t \geq t_0 : t \in J(t_0, x_0)), x(t; t_0, x_0) \in \Gamma$.
Lemme 1.4.2
Soit Γ un domaine de $\mathbb{R}^n$ tel que $\overline{\Gamma} \subset B_\rho$. Soit $V : I \times B_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et a une constante. Si
(I) $x_0 \in \Gamma$; $t_0 \in I$;
(II) $V(t_0, x_0) < a$;
(III) $(\forall (t, x) \in I \times Fr\Gamma)$, $V(t, x) \geq a$;
(IV) $(\forall (t, x) \in I \times \Gamma)$, $\dot{V}(t, x) \leq 0$;
alors $(\forall t \geq t_0), x(t; t_0, x_0) \in \Gamma$.
Démonstration
S'il existait un t^* tel que $x(t^*; t_0, x_0) \in Fr\Gamma$, on aurait, à cause de (III) ; $V(t^*, x(t^*; t_0, x_0)) - a \geq 0$. Mais l'hypothèse (IV) implique que
$V(t, x(t; t_0, x_0)) - a$ est décroissante en t. Donc on aurait aussi, en recourant à (II)

$V(t^*, x(t^*; t_0, x_0)) - a \leq V(t_0, x_0) - a < 0$, ce qui est absurde.

Remarque 1.4.3

Il est claire que, dans les hypothèses du lemme 1.4.2, si pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Gamma$, $V(t_0, x_0) < a$, le domaine Γ est positivement invariant.

Définition 1.4.4

On dit que la fonction $V : I \times B_\rho \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, avec $V(t, 0) \equiv 0$ est une fonction de Liapounov pour l'équation $(I.1)$ s'il existe un $\sigma < \rho$ tel que sur $I \times B'_\sigma$, $V(t, x)$ soit de signe défini tandis que $\dot{V}(t, x)$ y-est de signe semi-défini opposé.

Sans perte de généralité, nous supposerons dorénavant que les fonctions de Liapounov sont définies positives.

Théorème 1.4.5

S'il existe une fonction de Liapounov pour l'équation $(I.1)$, l'origine est stable.

Démonstration

Soit $V : I \times B'_\sigma \to \mathbb{R}$ la fonction de Liapounov. On sait qu'il existe une fonction $\mathbf{a}(r)$ de classe K telle que : $V(t, x) \geq \mathbf{a}(\|x\|)$ pour $0 \leq \|x\| \leq \sigma$ et $t \in I$. Pour ε quelconque, $0 \leq \varepsilon \leq \sigma$, on aura $V(t, x) \geq \mathbf{a}(\varepsilon)$ pour tout $(t, x) \in I \times FrB_\varepsilon$. Puisque V est continue et que $V(t, 0) \equiv 0$, pour tout t_0, il existera un $\eta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que $\|x_0\| < \eta \Rightarrow V(t_0, x_0) < \mathbf{a}(\varepsilon)$.

Pour tout x_0, tel que $\|x_0\| < \eta$, toutes les hypothèses du lemme 1.4.2 sont vérifiées si on y assimile Γ à B_ε et a à $\mathbf{a}(\varepsilon)$. Donc la solution $x(t; t_0, x_0)$ ne peut sortir de B_ε.

Corollaire (Stabilité uniforme)

Si on ajoute aux hypothèses du théorème 1.4.5 que $V(t, x) \to 0$ quand $x \to 0$, uniformément pour $t \in I$, alors η ne dépend pas de t_0 et l'origine est uniformément stable.

Lemme 1.4.6

Soit Γ un domaine de $\mathbb{R}^n$ tel que $\overline{\Gamma} \subset B_\rho$. Soit $V : I \times B_\rho \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a, b \in \mathbb{R}^*_+$. Si $(\forall (t, x) \in I \times \Gamma)$, $V(t, x) \geq a$ et $\dot{V}(t, x) < -b < 0$, alors $(\forall (t_0, x_0) \in I \times \Gamma)(\exists t^*,\ t_0 < t^*)\ x(t^*; t_0, x_0) \in Fr\Gamma$.

Démonstration

Notons $x(t)$ au lieu de $x(t; t_0, x_0)$. Supposons que $x(t)$ demeure dans Γ. on a

$$a \leq V(t, x(t)) = V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{V}(s, x(s))ds \leq V(t_0, x_0) - b(t - t_0)$$

Cette inégalité n'est vérifiée que pour $t - t_0 \leq \dfrac{V(t_0, x_0) - a}{b}$, $\quad (i)$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Lemme 1.4.7

Si on ajoute aux hypothèses du lemme 1.4.6 que
$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall (t, x) \in I \times \Gamma)\ V(t, x) \leq c$; alors il existe $T > 0$ tel que
$(\forall (t_0, x_0) \in I \times \Gamma)(\exists t^*,\ t_0 < t^* < t_0 + T)\ x(t^*; t_0, x_0) \in Fr\Gamma$.

-(Dans le lemme 1.4.6 T dépend de (t_0, x_0), dans le lemme 1.4.7 non, car on obtient au lieu de (i) $t - t_0 \leq \dfrac{c - a}{b}$).

Théorème 1.4.8

Soit $\sigma < \rho$ et $V : I \times B_\rho \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, qui soit fonction de Liapounov sur $I \times B'_\sigma$ pour l'équation $(I.1)$. Si

(I) $V(t,x) \to 0$ quand $x \to 0$, uniformément pour $t \in I$;

(II) $\dot{V}(t,x)$ est définie négative sur $I \times B'_\sigma$;

alors toutes les solutions $x(t;t_0,x_0)$ telles que $\forall t \geq t_0,\ x(t;t_0,x_0) \in B_\sigma$ tendent vers 0 quand $t \to +\infty$.

Démonstration

Montrons tout d'abord par l'absurde qu'il n'existe pas de $\mu > 0$ tel que, pour tout $t \geq t_0; V(t,x(t)) > \mu$.

Si un tel μ existe, choisissons grâce à (I) un $\nu(\mu) > 0$ tel que $\|x\| \leq \nu \Rightarrow V(t,x) < \mu$. On aura pour tout $t \geq t_0$; $\nu < \|x(t)\| < \sigma$. Mais $V(t,x) \geq \mathbf{a}(\|x\|)$, où $\mathbf{a}$ est une certaine fonction de classe K. Donc pour tout $t \geq t_0$ et x dans la couronne $\nu < \|x\| < \sigma$; $V(t,x) \geq \mathbf{a}(\nu)$. De même $\dot{V}(t,x) < -\mathbf{b}(\|x\|)$, où $\mathbf{b}$ est une fonction de classe K. Donc pour tout $t \geq t_0$ et dans la même couronne, $\dot{V}(t,x) < -\mathbf{b}(\nu)$.

Toutes les hypothèses du lemme 1.4.6 sont vérifiées si on y substitue la couronne à Γ ; et $\mathbf{a}(\nu)$ et $\mathbf{b}(\nu)$ respectivement aux constantes a et b.

Donc il existe un $T(t_0,x_0) > 0$ et un t^* , $t_0 < t^* < t_0 + T$ tel que $\|x(t^*)\| = \nu$, car $x(t)$ ne peut pas, par hypothèses, atteindre la frontière de B_σ. Donc $V(t^*,x(t^*)) < \mu$, ce qui est absurde.

La quantité μ n'existant pas et puisque V est décroissante, $V(t,x(t)) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Mais alors il en va de même de $\mathbf{a}(\,\|x(t)\|)$ et donc de $\|x(t)\|$.

Corollaire

Si on ajoute aux hypothèses du théorème 1.4.8 que

$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall (t,x) \in I \times B_\sigma)\ V(t,x) \leq c$; alors toutes les solutions $x(t;t_0,x_0)$ telles que $\forall t \geq t_0,\ x(t;t_0,x_0) \in B_\sigma$ tendent vers 0 quand $t \to +\infty$, uniformément en t_0 et $x_.$.

Théorème 1.4.9

Les hypothèses du théorème 1.4.8 suffisent à assurer la stabilité asymptotique uniforme de l'origine.

Démonstration

En effet, on sait grâce au corollaire sur la stabilité uniforme, que l'origine est uniformément stable. Il reste à montrer qu'elle est uniformément attractive.

Choisissons un $\varepsilon < \sigma$ et soit $\eta(\varepsilon)$ tel que $\|x_0\| < \eta$ implique $\|x(t;t_0,x_0)\| < \varepsilon$ pour tout $t \geq t_0$.

Puisque $V(t,x) \to 0$ quand $x \to 0$ uniformément pour $t \in I$, on peut aussi supposer qu'on a choisi ε assez petit pour que $V(t,x)$ soit bornée sur $I \times B_\varepsilon$. Alors la quantité η peut jouer le rôle de δ dans la définition 1.2.3 c, il suffit d'appliquer le théorème 1.4.8 et son corollaire à B'_ε au lieu de B'_σ.

1.5 Conditions suffisantes d'instabilité.

Théorème 1.5.1 (théorème de Tchétaev)

Supposons qu'il existe un $t_0 \in I$, un ε, $0 < \varepsilon < \rho$, un domaine $\Psi \subset B_\varepsilon$ et une fonction $V : [t_0, +\infty[\times B_\varepsilon \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, possédant les propriétés suivantes :

Il existe une constante k_1 et une fonction $\mathbf{a}$ de calasse K telles que, pour tout $(t, x) \in [t_0, +\infty[\times\Psi$

(I) $0 < V(t, x) \leq k_1$;

(II) $\dot{V}(t, x) \geq \mathbf{a}(Vt, x))$;

(III) $\forall(t, x) \in [t_0, +\infty[\times(Fr\Psi \cap B_\varepsilon)$, $V(t, x) = 0$;

(IV) l'origine des x est dans $Fr\Psi$.

Alors l'origine est instable.

Démonstration

Nous partons de la définition explicite de l'instabilité donnée par la définition 1.2.3.f. Etant données les quantités t_0 et ε mentionnés dans l'énoncé, il nous suffira de montrer que pour tout $\eta > 0$, il existe un x_0, $\|x_0\| < \eta$ et un

$t > t_0$, $t \in J(t_0, x0)$ tels que $\|x(t; t_0, x_0)\| \geq \varepsilon$.

Pour un η quelconque, choisissons x_0 non seulement tel que $\|x_0\| < \eta$, mais encore tel que $x_0 \in \Psi$, ce qui est possible en vertu de (IV). On tire alors de (I) que $V(t_0, x_0) > 0$. Supposons alors que pour tout $t \geq t_0$; $x(t) \in \Psi$. Alors puisque (II) implique $\dot{V}(t, x) \geq 0$, on a pour tout $t \geq t_0$; $V(t, x(t)) \geq V(t_0, x_0)$. D'où la chaîne d'inégalités valables pour tout $t \geq t_0$;

$$\begin{aligned}
k_1 &\geq V(t, x(t)) = V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{V}(s, x(s))ds \\
&\geq V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(V(s, x(s)))ds \\
&\geq V(t_0, x_0) + (t - t_0)\mathbf{a}(V(t_0, x_0)).
\end{aligned}$$

ou encore $k_1 - V(t_0, x_0) \geq (t - t_0)\mathbf{a}(V(t_0, x_0))$, inégalité qui devient fausse pour t assez grand. Donc il faut bien que la solution quitte Ψ. Elle ne peut le faire en traversant $(Fr\Psi \cap B_\varepsilon)$, puisque pour cela, il faudrait que $V(t, x)$ diminue jusqu'à la valeur nulle (hypothèse (III)). Or ceci ne peut se produire, puisque $\dot{V}(t, x) \geq 0$. Donc la solution quitte B_ε.

Théorème 1.5.2 (th. de Liapounov)

(c'est un corollaire du théorème 1.5.1, mais démontré avant celui-ci).

Supposons qu'il existe un $t_0 \in I$, un ε, $0 < \varepsilon < \rho$, un domaine $\Psi \subset B_\varepsilon$ et une fonction $V : [t_0, +\infty[\times B_\varepsilon \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, possédant les propriétés suivantes :

Il existe deux fonction $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ de calasse K telles que,

pour tout $(t, x) \in [t_0, +\infty[\times\Psi$

(I) $0 < V(t, x) \leq \mathbf{b}(\|x\|)$;

(II) $\dot{V}(t,x) \geq \mathbf{a}(\|x\|)$;
de plus
(III) $\forall (t,x) \in [t_0, +\infty[\times (Fr\Psi \cap B_\varepsilon),\ V(t,x) = 0$;
(IV) l'origine des x est dans $Fr\Psi$.
Alors l'origine est instable.
Démonstration

Il suffit de montrer que (I) et (II) entraînent les hypothèses (I) et (II) du théorème 1.5.1. Or $V(t,x)$ est bornée par $\mathbf{b}(\varepsilon)$. De plus on tire de (I) ci-dessus que pour $\|x\| < \varepsilon,\ \|x\| \geq \mathbf{b}^{-1}(V(t,x))$, où $\mathbf{b}^{-1}$ est évidemment de classe K. Alors on tire de (II) que $\dot{V}(t,x) \geq \mathbf{a}(\mathbf{b}^{-1}(V(t,x)))$, la fonction $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}^{-1}$ est évidemment aussi de classe K, ce qui achève la démonstration.

Remarque 1.5.3

Un autre théorème d'instabilité dû à Liapounov se déduit du théorème 1.5.1 en y remplaçant l'hypothèse (II) par l'égalité

$$\dot{V}(t,x) = cV(t,x) + W(t,x)$$

valable sur $[t_0, +\infty[\times \Psi$, où W est une fonction continue, plus grande ou égale à 0, et où $c > 0$.

Cas des équations autonomes

Proposition 1.5.4

Dans le cas d'une équation autonome $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$ et d'une fonction auxiliaire $V(x)$ indépendante de t, les hypothèses (I) et (II) du théorème 1.5.1 peuvent être remplacées par les suivantes, qui sont plus simples ;

(I) $V(x) > 0$; (II) $\dot{V}(x) > 0$.

Démonstration

Quitte à remplacer éventuellement ε par un $\varepsilon^* < \varepsilon$, on pourra considérer que $V(x)$, définie et continue sur le compact B'_ε est bornée. De plus pour un $\eta > 0$, considérons l'ensemble

$$S = \{x : V(x) \geq \eta\ ,\ x \in \overline{\Psi} \cap B'_\varepsilon\}$$

Puisque S est compact et $\dot{V}(x)$ est continue, on a

$$\inf\{\dot{V}(x) : x \in S\} = \delta(\eta) > 0$$

En effet, $\dot{V}(x)$ sera toujours > 0 sur Ψ si on a diminué ε. La fonction $\delta(\eta)$ est monotone croissante, avec $\delta(0) \geq 0$. Donc on peut comme à la proposition 1.3.4, trouver une fonction $\mathbf{a}$ de classe K telle que, pour tout $\eta, \delta(\eta) \geq \mathbf{a}(\eta)$. Considérons maintenant les points de S où $V(x) = \eta$. En ces points $\dot{V}(x) \geq \mathbf{a}(\boldsymbol{\eta})$ et donc $\dot{V}(x) \geq \mathbf{a}(\mathbf{V(x)})$.

1.6 Stabilité dans les systèmes linéaires

Théorème 1.6.1 (Théorème fondamental)
Soit
$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \qquad (I.8)$$
un système homogène.

Nous noterons $R(t, t_0)$ la résolvante de $(I.8)$.

a) Du point de vue de la stabilité toutes les solutions de $(I.8)$ sont de même nature ; stables, uniformément stables, asymptotiquement stables ou uniformément asymptotiquement stables ou instables. Il suffit donc de connaître la nature de la solution $x \equiv 0$.

b) Le système est stable pour t_0 si, et seulement si,
$$\exists K(t_0) \text{ tel que } \|R(t, t_0)\| \leq K(t_0) \ , \ \forall t \geq t_0;$$
Il est uniformément stable pour $t_0 \geq T$ si, et seulement si,
$$\exists K(T) \text{ tel que } \forall s, t \ : \ T \leq s \leq t \ , \quad \|R(t, s)\| \leq K(T) \ ;$$
Le système est stable si, et seulement si, toutes les solutions sont bornées, pour $t \geq t_0$.

c) Le système est asymptotiquement stable pour t_0 si, et seulement si, $\lim\limits_{t \to +\infty} R(t, t_0) = 0$.

Il est uniformément asymptotiquement stable pour $t_0 \geq T$ si, et seulement si,
$$\begin{aligned} \exists K(T) &> 0 \text{ et } \alpha(T) > 0 \text{ tels que } \forall s, t \ : \ T \leq s \leq t < +\infty \ , \\ \|R(t, s)\| &\leq K(T) \exp[-\alpha(T)(t - s)] \ ; \end{aligned}$$
Le système est asymptotiquement stable si, et seulement si, toutes les solutions ont pour limite 0 quand $t \to +\infty$.

d) Le système est instable si, et seulement si, $R(t, t_0)$ n'est pas bornée si $t \to +\infty$.

Démonstration

a) Soit $x(t; t_0, x_0)$ est $x(t; t_0, y_0)$ deux solutions. $x(t; t_0, x_0) = R(t, t_0)x_0$ de sorte que celle-ci est stable si, et seulement si, $\exists \eta(t_0) > 0$ tel que

$\|x_0 - x_1\| \leq \eta(t_0) \Rightarrow \|R(t, t_0)(x_0 - x_1)\| \leq \varepsilon$. Mais alors si $\|y_0 - y_1\| \leq \eta(t_0)$ on a aussi $\|R(t, t_0)(y_0 - y_1)\| \leq \varepsilon$ et la seconde solution est stable.

On démontre de la même façon l'équivalence pour les autres types de stabilité.

b) Il suffit d'étudier la stabilité de la solution $x(t) \equiv 0$. Celle-ci est stable si, et seulement si, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta(t_0)$ tel que $\|x_0\| \leq \eta(t_0) \Rightarrow \|x(t; t_0, x_0)\| \leq \varepsilon$, $\forall t \geq t_0$.

Si $\forall t \geq t_0$; $\|R(t, t_0)\| \leq K(t_0)$ alors $\|R(t, t_0)x_0\| \leq K(t_0) \|x_0\|$ qui est inférieur à ε dès que $\|x_0\| \leq \dfrac{\varepsilon}{K(t_0)} = \eta(t_0)$.

Si réciproquement, $x(t) \equiv 0$ est stable,

$\|R(t,t_0)\| = \sup\limits_{w:\|w\|=\eta(t_0)} \left\| R(t,t_0)\dfrac{w}{\eta(t_0)} \right\| \leq \dfrac{\varepsilon}{\eta(t_0)}$, $\forall t > t_0$ ce qui établit que $\|R(t,t_0)\| \leq K(t_0) = \dfrac{\varepsilon}{\eta(t_0)}$.

Pour la stabilité uniforme, on écrit que les relations précédentes sont vraies $\forall t_0 \geq T$.

c) Supposons que $\lim\limits_{t\to+\infty} R(t,t_0) = 0$. ($R(t,t_0)$ est alors bornée) $x(t) \equiv 0$ est alors stable. De plus $\forall x_0$, $\|x(t;t_0,x_0)\|$ a pour limite 0 et $x(t) \equiv 0$ est asymptotiquement stable. La réciproque est évidente.

Si $\|R(t,s)\| \leq K(T)\exp[-\alpha(T)(t-s)]$ pour $t \geq s \geq t_0 > T$; alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\|x(t;t_0,x_0) - x(t;t_0,x_1)\| \leq K(T)\exp[-\alpha(T)(t-s)]\,\|x_0 - x_1\| \leq \varepsilon$ pour $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$ et le système est uniformément asymptotiquement stable pour $t_0 \geq T$.

Etablissons réciproquement que si le système est uniformément asymptotiquement stable pour $t_0 \geq T$, on peut trouver α et K ayant la propriété annoncée.

Le système étant uniformément stable, on sait déjà que $\|R(t,s)\| \leq M(T)$ pour tout $T \leq s \leq t < +\infty$. Par ailleurs $\exists \eta_1(T)$ tel que pour $\|x_0\| \leq \eta_1(T)$,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon)$ tel que $t \geq t_0+\delta(\varepsilon) \Rightarrow \|R(t,t_0)x_0\| \leq \varepsilon$. (attractivité uniforme) alors $\sup\limits_{w:\|w\|=\eta_1(T)} \|R(t,t_0)w\| = \|R(t,t_0)\|\,\eta_1(T) \leq \varepsilon$. Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon)\ : t \geq t_0 + \delta(\varepsilon),\ \ \|R(t,t_0)\|\,\eta_1(T) \leq \frac{\varepsilon}{\eta_1(T)}.$$

Choisissons alors $\varepsilon < \eta_1(T)$ et remarquons que

$R(t+2\delta(\varepsilon),t) = R(t+2\delta(\varepsilon),t+\delta(\varepsilon))R(t+\delta(\varepsilon),t)$ et donc que $\|R(t+2\delta(\varepsilon),t)\| \leq \left(\dfrac{\varepsilon}{\eta_1(T)}\right)^2$. Plus généralement $\|R(t+n\delta(\varepsilon),t)\| \leq \left(\dfrac{\varepsilon}{\eta_1(T)}\right)^n$.

Soit

$$\begin{aligned} \alpha(T) &= -\frac{1}{\delta(\varepsilon)} Log\left(\frac{\varepsilon}{\eta_1(T)}\right), \qquad \alpha(T) > 0 \\ et\ \ K(T) &= M(T)\exp\alpha(T)\delta(\varepsilon). \end{aligned}$$

Soit $t_0 + n\delta(\varepsilon) \leq t \leq t + (n+1)\delta(\varepsilon)$, alors

$$\begin{aligned} \|R(t,t_0)\| &\leq \|R(t,t_0+n\delta(\varepsilon)\|\,\|R(t_0+n\delta(\varepsilon),t_0)\| \leq M(T)\exp(-n\delta(\varepsilon)\alpha(T) \\ &= K(T)\exp(-\alpha(T)\delta(\varepsilon))\exp(-\alpha(T)n\delta(\varepsilon)) \leq K(T)\exp(-\alpha(T)(t-t_0)) \end{aligned}$$

d) Ce point est évident.

Remarque 1.6.2

Pour les systèmes avec second membre il n y a pas de lien automatique entre le fait que le système soit stable et le fait que les solutions restent bornées ; tout dépend du second membre.

Le résultat essentiel est celui-ci.

Théorème 1.6.3
Soit
$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \qquad (I.9)$$
et
$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(t) \qquad (I.10)$$

a) Toutes les solutions de $(I.10)$ sont de même nature du point de vue de la stabilité ; on peut parler de système stable ou instable etc...

b) La nature du système $(I.10)$ est la même que celle du système $(I.9)$.

Démonstration

Nous savons qu'une solution $x(t)$ de l'équation $(I.10)$, de condition initiale $x(t_0) = x_0$ s'écrit :

$$x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)b(s)ds.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \|x(t; t_0, x_0) - x(t; t_0, x_1)\| &= \left\| R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)b(s)ds - R(t, t_0)x_1 - \int_{t_0}^{t} R(t, s)b(s)ds \right\| \\ &= \|R(t, t_0)(x_0 - x_1)\| \end{aligned}$$

Donc la norme de la différence de deux solutions de l'équation $(I.10)$ est la même que celle de la différence de deux solutions de l'équation $(I.9)$, correspondantes, quand $t > t_0$ ou $t \to +\infty$, ce qui établi à la fois les points a) et b) du théorème.

Stabilité dans les systèmes linéaires à coefficients constants

Nous connaissons la structure des solutions pour une équation différentielle du type
$$\frac{dx}{dt} = Ax \qquad (I.11)$$
où $x \in \mathbb{R}^n$ et où A est une matrice constante d'ordre n. Le théorème suivant s'en déduit immédiatement.

Théorème 1.6.4

I) l'origine est asymptotiquement stable si, et seulement si, toutes les valeurs propres de A sont à parties réelles strictement négatives.

II) Si l'une (au moins) des valeurs propres de A est à partie réelle strictement positive, l'origine est instable.

III) Si

a) toutes les valeurs propres de A sont à parties réelles négatives,

b) l'une au moins est à partie réelle nulle,

c) toute valeur propre à partie réelle nulle correspond à des blocs de Jordan en nombre égal à sa multiplicité (ie. que tous ces blocs sont d'ordre 1), alors l'origine est stable mais pas asymptotiquement stable.

IV) Si les hypothèses a) et b) du point (III) sont réalisées sans que l'hypothèse (c) ne le soit, alors l'origine est instable.

Remarque

L'hypothèse (c) signifie que pour toute valeur propre, de A, de partie réelle nulle la dimension du sous espace propre associé est égale à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre .

Remarque 1.6.5

Nous avons ainsi épuisé tous les cas et le problème de la stabilité de l'origine pour une équation du type (I.11) peut sembler vidé.

Il est pourtant intéressant de l'envisager aussi du point de vue de la méthode de Liapounov. Nous allons chercher à construire des fonctions de Liapounov pour (I.11).

Théorème 1.6.6

Soit A une matrice d'ordre n, réelle ou complexe. Il existe une forme linéaire $V(x)\ :\ \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ non identiquement nulle et satisfaisant à l'équation

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}(x)/Ax\right) \equiv \lambda V(x) \qquad (I.12)$$

si, et seulement si, λ est une valeur propre de A.

Démonstration

Si la forme linéaire cherchée est $V(x) = (a/x)$, on obtient par substitution dans (I.12), $(a/Ax) = \lambda(a/x)$ ou encore $(A^T a/x) = \lambda(a/x)$. On tire de là l'équation $A^T a = \lambda a$, qui détermine a. Elle possède à coup sûr une solution non nulle puisque λ, qui est une valeur propre de A, est aussi de ce fait une valeur propre de A^T.

Pour étendre ce théorème à des formes quadratiques, notons tout d'abord qu'une forme quadratique $V(x)\ :\ \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ possède $N = \dfrac{n(n+1)}{2}$ termes. Ce nombre est égal au nombre de façons qu'on peut choisir n entiers $m_1, ..., m_n$ positifs (≥ 0), de telle sorte que $m_1 + ... + m_n = 2$. La forme quadratique $V(x)$ est une combinaison linéaire de N monômes du second degré.

Si $z(x)$ est le vecteur de ces monômes, on peut écrire $V(x)$ sous la forme

$$V(x) = (a/z(x)) \qquad (I.13)$$

avec $a,\ z(x) \in \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$.

Théorème 1.6.7 Théorème de Liapounov)

Soit A une matrice d'ordre n, réelle ou complexe, de valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Il existe une forme quadratique $V(x)\ :\ \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ non identiquement nulle et satisfaisant à l'équation

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}(x)/Ax\right) \equiv \mu V(x) \qquad (I.14)$$

si, et seulement si, μ est de la forme

$$\mu = m_1\lambda_1 + ... + m_n\lambda n \qquad (I.15)$$

où le m_i sont des entiers positifs ou nuls tels que

$$m_1 + ... + m_n = 2 \qquad (I.16)$$

les λ_i sont les valeurs propres de A. Ces nombres μ sont les valeurs propres de la matrice D d'ordre N définie par $\frac{\partial z}{\partial x} Ax \equiv Dz$.

Démonstration

Substituons à$V(x)$ dans $(I.14)$ sa valeur donnée par $(I.13)$,

$\left(\frac{\partial}{\partial x}(a/z)/Ax\right) \equiv \mu(a/z)$.

Si $\frac{\partial z}{\partial x}$ est la matrice jacobienne de z par rapport à x, on a

$\frac{\partial}{\partial x}(a/z) \equiv \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^T a$, d'où

$\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^T a/Ax\right) \equiv \mu(a/z)$ ou encore

$$\left(a/\frac{\partial z}{\partial x}Ax\right) \equiv \mu(a/z) \qquad (I.17)$$

Mais $\frac{\partial z}{\partial x}Ax$ est un vecteur de formes quadratiques en x. Donc il existe une matrice D constante d'ordre N, telle que $\frac{\partial z}{\partial x}Ax \equiv Dz$. Alors $(I.17)$ devient $(a/Dz) \equiv \mu(a/z)$ ou encore $(D^T a/z) \equiv \mu(a/z)$.

Par conséquent $D^T a = \mu a$.

Nous concluons de ceci qu'il existe une forme quadratique non identiquement nulle, satisfaisant à $(I.14)$ si, et seulement si, μ est valeur propre de D.

Montrons ensuite que tout μ satisfaisant à $(I.15)$ et $(I.16)$ est valeur propre de D^T. Pour cela, faisons correspondre aux valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de A, n formes linéaires $V_i(x)$ non identiquement nulles mais non forcément distinctes, telles que

$$\left(\frac{\partial V_i}{\partial x}/Ax\right) \equiv \lambda_i V_i \qquad (I.18)$$

Ceci est possible grâce au théorème 1.6.6.

Montrons ensuite que la forme quadratique

$$V = \prod_{1 \leq i \leq n} V_i^{m_i} \qquad (I.19)$$

satisfait à $(I.14)$.

On a :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n} m_j V_j^{m_{j-1}} \frac{\partial V_j}{\partial x} \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} V_i^{m_i}$$

Dans cette expression, toutes les quantités sont des scalaires, sauf $\dfrac{\partial V_i}{\partial x}$ qui est un gradiant. On aura donc

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}/Ax\right) \equiv \sum_{j=1}^{n} m_j V_j^{m_{j-1}} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x}/Ax\right) \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} V_i^{m_i} = \sum_{j=1}^{n} m_j \lambda_j V_j^{m_j} \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} V_i^{m_i}$$

D'où, en tenant compte successivement de $(I.18)$ et $(I.19)$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}/Ax\right) \equiv (m_1\lambda_1 + ... + m_n\lambda_n)\, V.$$

Grâce à la première partie de la démonstration, on voit que $m_1\lambda_1 + ... + m_n\lambda_n$ est valeur propre de D.

Montrons enfin, pour terminer la démonstration, que toute valeur propre de D^T est de la forme spécifiée par $(I.15)$ et $(I.16)$.

Si tous les nombres $(I.15)$ sont distincts, alors, puisqu'il y en a N, on a effectivement montré que toutes les valeurs propres de D^T sont du type $(I.15)$.

Montrons par l'absurde que cette conclusion demeure vraie même si tous les nombres $(I.15)$ ne sont pas distincts.

Soit $\mu^{'}$ une valeur propre de D qui ne soit pas comprise dans $(I.15)$ et soit k la différence entre $\mu^{'}$ et le nombre $(I.15)$ le plus voisin.

Quand on modifie A, on modifie à la fois les coefficients de l'équation aux valeurs propres de A et ceux de l'équation aux valeurs propres de D^T.

Modifions A suffisamment peu pour que

1) $\mu^{'}$ soit déplacé d'une quantité arbitrairement petite ;

2) les nombres $(I.15)$ soient déplacés de quantités arbitrairement petites et deviennent tous distincts.

Ceci est possible, comme on le montrera ci-après.

Mais alors le nombre $\mu^{'}$ est devenu égal à l'un des nombres $(I.15)$, ce qui est impossible puisqu'il était au départ séparé de chacun d'eux par une quantité au moins égale à k.

Reste à montrer qu'on peut obtenir les résultats 1) et 2).

Soit B, avec $A = S^{-1}BS$, la forme de Jordan de A. Modifions arbitrairement peu les éléments diagonaux de B de manière qu'ils deviennent tous distincts. Le résultat n'est plus une forme de Jordan, mais la matrice A correspondante, dont les éléments ont été, eux aussi, modifiés arbitrairement peu, a toutes ses valeurs propres distinctes. Les éléments de D peuvent, dans la même opération, être modifiés aussi peu qu'on veut, et puisque les valeurs propres d'une matrice sont fonctions continues de ses éléments, $\mu^{'}$ peu également être déplacé arbitrairement peu.

Théorème 1.6.8

Soit $U(x)\ :\ \boldsymbol{C}^n \to C$ une forme quadratique, soit A une matrice d'ordre n, réelle ou complexe et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres, non forcément distinctes. Si, pour tous les entiers positifs (≥ 0) m_i tels que $m_1 + ... + m_n = 2$ on a

$$m_1\lambda_1 + ... + m_n\lambda_n \neq 0 \qquad (I.20)$$

alors il existe une seule forme quadratique $V(x)\ :\ \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ non identiquement nulle, telle que

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}/Ax\right) \equiv U \qquad (I.21)$$

Démonstration

Soient $V(x) = (a/z(x))$ et $U(x) = (b/z(x))$ où $z(x)$ est le vecteur des monômes du second degré en x, déjà utilisé ci-dessus. Par substitution dans $(I.21)$, on obtient successivement

$$\begin{aligned}
\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^T a/Ax\right) &\equiv (b/z)\ ; \\
\left(a/\frac{\partial z}{\partial x}Ax\right) &\equiv (b/z)\ ; \\
(a/Dz) &\equiv (b/z)\ ; \\
(D^T a/z) &\equiv (b/z)\ ;
\end{aligned}$$

La matrice D est la même que celle dans la démonstration du théorème 1.6.7.

La forme quadratique Vsera déterminée par l'équation $D^T a = b$. Or d'après le théorème 1.6.7 et les hypothèses sur les m_i, toutes les valeurs propres de D^T sont non nulles et donc det $D^T \neq 0$.

Il en résulte qu'on trouvera un et un seul vecteur a tel que $V(x) = (a/z(x))$ soit solution du problème.

Remarque 1.6.9

Le théorème 1.6.8 concerne les formes quadratiques U et V de $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. Il demeure vrai si on l'applique à des formes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, à condition que la matrice A soit réelle.

#Nous somme maintenant en mesure de construire, pour une équation du type $(I.11)$, des fonctions $V(x)$ satisfaisants aux hypothèses requises dans les théorèmes de Liapounov sur la stabilité et l'instabilité. Dans l'équation $\frac{dx}{dt} = Ax$, nous supposerons A réelle et désignerons ses valeurs propres, non forcément distinctes, par $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

#Le théorème suivant est une réciproque, pour les équations du type $\frac{dx}{dt} = Ax$, du théorème 1.4.9 de Liapounov sur la stabilité asymptotique.

Théorème 1.6.10

Si les valeurs propres de A sont à parties réelles strictement négatives, à toute forme quadratique $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, définie négative, correspond une et une seule forme quadratique $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, définie positive et telle que $\left(\frac{\partial V}{\partial x}/Ax\right) = \dot{V} = U$ où la dérivée $\dot{V}$ est calculée le long des solutions de $(I.11)$.

Démonstration

Les λ_i étant à parties réelles strictement négatives, la condition $(I.20)$ est réalisée. Le théorème 1.6.8 joint à l'équation $(I.11)$ fait voir qu'il existe une et une seule forme quadratique V telle que

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}/Ax\right) = \dot{V} = U \qquad (I.22)$$

cette forme est définie positive, car

a) Si elle prenait des valeurs négatives, on se trouverait dans les conditions du théorème 1.5.2 sur l'instabilité, et l'origine serait instable, contrairement à l'hypothèse.

b) si elle était semi-définie positive sans être définie positive, il existerait un $x^* \neq 0$ tel que $V(x^*) = 0$. Or puisque $U(x^*) = \dot{V}(x^*) < 0$, la fonction $V(x(t))$, nulle et de dérivée strictement négative quand $x(t) = x^*$, prendrait des valeurs strictement négatives, ce qui est absurde.

Passons maintenant à une réciproque du théorème 1.5.2 sur l'instabilité, toujours relativement à l'équation $\dfrac{dx}{dt} = Ax$.

Théorème 1.6.11

Si l'une au moins des valeurs propres de A est à partie réelle strictement positive et si

$$m_1\lambda_1 + ... + m_n\lambda_n \neq 0 \qquad (I.23)$$

pour tous les entiers positifs (≥ 0) m_i tels que $m_1 + ... + m_n = 2$, à toute forme quadratique U, définie positive, correspond une et une seule forme quadratique V telle que

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}/Ax\right) = \dot{V} = U$$

cette forme n'est pas semi-définie négative.

Démonstration

Grâce au théorème 1.6.8, on montre comme en $(I.22)$ qu'il existe une forme quadratique V telle que $\dot{V} = U$.

Cette forme ne peut être définie négative, car alors l'origine serait asymptotiquement stable (Th.1.4.9).

Elle ne peut être semi-définie négative tout en étant pas définie négative, car alors il existerait un $x^* \neq 0$ tel que $V(x^*) = 0$. Or puisque $U(x^*) = \dot{V}(x^*) > 0$, la fonction $V(x(t))$, nulle et de dérivée strictement positive quand $x(t) = x^*$, prendrait des valeurs strictement positives, ce qui est absurde.

Remarque 1.6.12

La forme V du théorème 1.6.11 satisfait aux hypothèses du théorème 1.5.2. Le résultat obtenu n'est pourtant pas aussi puissant qu'on pourrait le souhaiter, car la condition $(I.23)$ est très restrictive ; en particulier, elle n'est jamais vérifiée si l'une au moins des valeurs propres λ_i est nulle, non plus si deux des λ_i ont une somme nulle. L'avantage du théorème 1.6.11 est qu'il conduit au théorème suivant, réciproque de la remarque 1.5.3 et où la condition $(I.23)$ n'est plus requise.

Théorème 1.6.13

Si l'une au moins des valeurs propres de A est à partie réelle strictement positive, à toute forme quadratique U, définie positive, correspond une forme quadratique V et un $c > 0$ tels que

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}/Ax\right) = \dot{V} = cV + U$$

La forme V n'est pas semi-définie négatives.

Démonstration

Quel que soit $c > 0$, les racines de $\det(A - \lambda I)$ et $\det(A - \frac{c}{2}I - \mu I)$ satisfont aux équations $\lambda_i = \frac{c}{2} + \mu_i$.

On peut choisir c assez petit pour que

1) l'un des μ_i soit à partie réelle strictement positive;

2) quels que soient les entiers m_i positifs (≥ 0) tels que $m_1 + ... + m_n = 2$, on ait $m_1\mu_1 + ... + m_n\mu_n = -c + m_1\lambda_1 + ... + m_n\lambda_n \neq 0$.

Alors le théorème 1.6.11 montre qu'à toute forme quadratique U, définie positive, correspond une et une seule forme quadratique V, non semi-définie négative, telle que

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}/(A - \frac{c}{2}I)x\right) = U$$

Cette équation s'écrit encore

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}/Ax\right) - \frac{c}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}/x\right) = U$$

Mais le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes indique que $\left(\frac{\partial V}{\partial x}/x\right) = 2V$, d'où le résultat annoncé.

Rappels

1) On dit qu'un polynôme de $A[X_1, ..., X_p]$ est homogène de degré (total) n s'il est somme de monômes de degré n.

2) On dit que $a_{i_1 ....i_p} X_1^{i_1} X_2^{i_2} ... X_p^{i_p}$, ($a_{i_1 ....i_p} \neq 0$) est un monôme, sont degré total est $i_1 + i_2 + ... + i_p$.

3) Une forme quadratique est un polynôme homogène de degré 2.

Théorème A

Un polynôme f de $K[X_1, ..., X_m]$ est homogène de degré total n si, et seulement si,

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial X_1} + ... + X_m \frac{\partial f}{\partial X_m} = nf$$

c'est la formule d'Euler.

1.7 La stabilité d'après la première approximation

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t,x) \qquad (I.24)$$

où A est une matrice réelle d'ordre n et où f est continue et localement lipschitzienne en x sur $I \times B_\rho$. On continue de supposer que $f(t,0) \equiv 0$, si bien que $(I.24)$ admet la solution identiquement nulle.

Posons-nous le problème de savoir dans quelles conditions la stabilité asymptotique de l'origine pour l'équation $\dfrac{dx}{dt} = Ax$ entraîne la même propriété pour $(I.24)$. Cette question est évidemment d'une grande importance pratique. Nous étudierons aussi la question analogue relative à l'instabilité.

Théorème 1.7.1

Si toutes les valeurs propres de A sont à parties réelles strictement négatives et si

$$\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \to 0 \quad \text{quand} \quad \|x\| \to 0 \qquad (I.25)$$

uniformément pour $t \in I$, l'origine est uniformément asymptotiquement stable pour $(I.24)$.

Démonstration

D'après le théorème 1.6.10, on sait qu'à une forme quadratique définie négative $U(x)$, on peut faire correspondre une forme quadratique définie positive $V(x)$ telle que $\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}/Ax\right) = U$.

La dérivée temporelle de V le long des solutions de $(I.24)$ s'écrit

$$\dot{V} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}/Ax + f(t,x)\right) = U + \left(\frac{\partial V}{\partial x}/f(t,x)\right)$$

Grâce à l'hypothèse $(I.25)$, on voit qu'il existe un voisinage de l'origine sur lequel $\dot{V}$ est définie négative (voir Exo2 TD). D'où grâce au théorème 1.4.9, la proposition annoncée.

Théorème 1.7.2

Si l'une au moins des valeurs propres de A est à partie réelle strictement positive et si

$$\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \to 0 \quad \text{quand} \quad \|x\| \to 0 \qquad (I.26)$$

uniformément pour $t \in I$, l'origine est instable pour $(I.24)$.

Démonstration

D'après le théorème 1.6.13, on sait qu'à une forme quadratique définie positive $U(x)$, on peut faire correspondre une forme quadratique non semi-définie négative $V(x)$ telle que $\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}/Ax\right) = cV + U$. où c est un nombre strictement positif judicieusement choisi. La dérivée temporelle de V le long des solutions de $(I.24)$ s'écrit

$$\dot{V} = \left(\frac{\partial V}{\partial x} / Ax + f(t,x)\right) = cV + U + \left(\frac{\partial V}{\partial x} / f(t,x)\right)$$

Grâce à l'hypothèse $(I.26)$, on voit qu'il existe un voisinage de l'origine sur lequel $U + \left(\frac{\partial V}{\partial x} / f(t,x)\right)$ est définie positive . D'où grâce à la remarque 1.5.3, la proposition annoncée.

Cas particulier (linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre**)**

On considère l'équation différentielle autonome $\frac{dx}{dt} = f(x)$, où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on suppose que $f(0) = 0$. Si on note $M_J(f)(x)$ la matrice jacobienne de f au point x on obtient $\frac{dx}{dt} = M_J(f)(0)x + \circ x$. d'où grâce aux théorèmes 1.7.1 et 1.7.2 , si

1) toutes les valeurs propres de $M_J(f)(0)$ sont strictement négatives, l'origine est asymptotiquement stable.

2) l'une au moins des valeurs propres de $M_J(f)(0)$ est strictement positive, l'origine est instable.

Fin de la première partie.

Université A. MIRA - Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques
Module : Stabilité

Série d'exercices N°1

<u>EXO 1 :</u> En partant de la définition de la stabilité au sens de Liapounov, étudier la stabilité de la solutions du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2t(x+1) \\ x(0) &= 0 \end{aligned}$$

<u>EXO 2 :</u> Soit V de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie positive de degré $m \geq 2$, $[\forall \lambda \in \mathbb{R} : V(\lambda x) = \lambda^m V(x)]$. Montrer que si $W : B'_\sigma \to \mathbb{R}$, définie et continue sur une boule fermée B'_σ est telle que

$(\forall x \in B'_\sigma)$ $|W(x)| \leq r \|x\|^m$ où $0 < r < \inf \{V(x) : \|x\| = 1\}$

alors $U(x) = V(x) + W(x)$ est définie positive sur B'_σ.

<u>EXO 3 :</u> Parmi les fonctions suivantes, définies pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $t \in]0, +\infty[$, quelles sont celles

a) qui sont définies positives;

b) qui sont définies positives et tendent vers 0 uniformément en t quand $(\|(x, y)\|)$ tend vers 0.

$$\begin{aligned}
V_1(t,x,y) &= x^2 + y^4 + \sin^2 t \\
V_2(t,x,y) &= (x^2 + y^2)\exp t \\
V_3(t,x,y) &= x^2 + 2xy + y^2 \\
V_4(t,x,y) &= x^2 + 3xy + y^2 \\
V_5(t,x,y) &= \frac{x^2 + x^2y^2 + y^2}{1 + x^2} \\
V_6(t,x,y) &= \frac{x^2}{1 + \frac{1}{2}\cos t} + y^2 \\
V_7(t,x,y) &= \frac{a}{2}(x^2 + y^2)^2 + by^2 + cx^2, \qquad a, b, c > 0 \\
V_8(t,x,y) &= \max(x^2, y^2) \\
V_9(t,x,y) &= x(x^2 + xy + y^2)\exp t
\end{aligned}$$

<u>EXO 4 :</u> Considérons pour $x \in \mathbb{R}^n$, l'équation différentielle

$$\dot{x} = (D(t) + A(t))x \tag{1}$$

où $D(t)$ et $A(t)$ sont des matrices définies sur $I =]\tau, +\infty[$, continues, la première diagonale et la seconde antisymétrique. En considérant la fonction auxiliaire $V(x) = (x/x)$, étudier la stabilité de la solution $x \equiv 0$ de (1).

EXO 5 : Etudier la stabilité de la solution de :
1) $3(t-1)\dot{x} = x$; $x(2) = 0$
2) $\dot{x} = t - x$; $x(0) = 1$.

EXO 6 : Soit le système $\begin{cases} \dot{x} = x(y^2 - 1) \\ \dot{y} = y(x^2 - 1) \end{cases}$ (1)

1) Montrer que $V(x, y) = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$ est une fonction de Liapounov pour ce système.
2) Montrer que $\Delta((0, 0), \sqrt{2})$ est un disque positivement invariant.
3) Montrer que $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.

EXO 7 : Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $t \mapsto a(t)$ une fonction continue et $c \in \mathbb{R}_+^*$, tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a(t) < -c < 0$. Montrer que pour l'équation

$$\ddot{x} + a(t)x = 0$$

l'origine est instable.

EXO 8 : Déterminer les propriétés de stabilité des points critiques du système $\begin{cases} \dot{x} = -x - (1 + \dfrac{1}{2}\cos t)y \\ \dot{y} = x \end{cases}$

EXO 9 : Pour le système $\begin{cases} \dot{x} = 2x^3y^2 - x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$

1) Montrer que l'origine est uniformément asymtotiquement stable.
2) En utilisant la fonction auxiliaire $V(x, y) = x^2 + y^2$, trouver, s'il existe, le plus grand disque pour lequel on puisse affirmer qu'il est positivement invariant et que toutes les solutions de condition initiale (t_0, x_0) avec x_0 appartenant à ce disque, tendent vers l'origine quand t tend vers $+\infty$.

EXO 10 : Soit le système $\begin{cases} \dot{x} = y^3 + x^5 \\ \dot{y} = x^3 + y^5 \end{cases}$

En utilisant la fonction auxiliaire $V(x, y) = x^4 - y^4$, étudier la stabilité de la solution nulle de ce système.

EXO 11 : On considère le système $\begin{cases} \dot{x} = x^3 + 2xy^2 \\ \dot{y} = x^2y \end{cases}$

En utilisant la fonction auxiliaire $V(x,y) = x^2 - y^2$, étudier la stabilité de son origine.

EXO 12 : Considérons l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

a) Ecrire cette équation sous la forme d'un système.

b) En utilisant la fonction auxiliaire $V(x,y) = x^2 + y^2$, montrer que l'origine est uniformément stable pour $\mu < 0$.

EXO 13 : Etudier la stabilité de l'origine des systèmes suivants

1) $$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - \sin y^2 \\ \dot{y} = -x - 3y + x(\exp \dfrac{x^2}{2} - 1) \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + x^2 \sin y \\ \dot{y} = -x - 4y + 1 - \cos y^2 \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \dot{x} = 5x + y \cos y - \dfrac{x^3}{3} \\ \dot{y} = 3x + 2y + \dfrac{x^4}{12} - y^3 e^y \end{cases}$$

EXO 14 : Etudier la stabilité de l'origine du plan des phases $(x, \dot{x})$ pour l'équation différentielle

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \qquad ; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

EXO 15 : Considérons le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x + 2z + 2t^3 + 5t^2 + 2t \\ \dot{y} = 41x + 5y - 19z - 19t^3 - 41t^2 - 10t + 2 \\ \dot{z} = 5x + 2y - 3z - 3t^3 - 8t^2 - 4t \end{cases}$$

1) Vérifier que $x^* = t^2 \;\; , \;\; y^* = 2t \;\; , \;\; z^* = -t^3$ est une solution particulière de ce système.

2) Etudier la stabilité de cette solution.