Université A. MIRA - Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques
Enseignant : BERBOUCHA Ahmed

Cours de Master 1
Module : Stabilité des Solutions d'EDO

Deuxième partie :

I) Questions approfondies en théorie de stabilité :

Soit, comme dans la première partie, $I =]\tau, +\infty[$, où τ peut être égal à $-\infty$; et pour un ρ strictement positif ou infini, une boule ouverte $B_\rho \subset \mathbb{R}^n$, centrée à l'origine et de rayon ρ. On considère une fonction $f : I \times B_\rho \to \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, continue et localement lipschitzienne en x, et l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \qquad (II.1)$$

$x(t; t_0, x_0)$ désignera la solution de $(II.1)$, de condition initiale $x(t_0) = x_0$.
$B'_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| \leq \sigma\}$.

2.1 Utilisation de fonctions non définies positives :

Le lemme 1.2.4 a fourni des conditions suffisantes pour qu'une solution issue à l'instant t_0 d'un ensemble donné, y demeure aux instants ultérieurs. Le lemme suivant donne des conditions suffisantes pour qu'une solution issue à l'instant t_0 d'un ensemble P_1 donné, demeure aux instants ultérieurs dans un ensemble $P_2 \supset P_1$.

Lemme 2.1.1
Soit P_1 et P_2 deux compacts de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\phi \subsetneq \overset{\circ}{P_1} \subset P_1 \subset \overset{\circ}{P_2} \subset P_2 \subset B'_\sigma \subset B_\rho$$

Soient $V : I \times B'_\sigma \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto V(t, x)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathbf{a}$ une constante telles que

$I)$ $(\forall t \in I)$ $(\forall x \in FrP_2)$ $V(t, x) \geq \mathbf{a}$;
$II)$ $(\forall t \in I)$ $(\forall x \in FrP_1)$ $V(t, x) < \mathbf{a}$;
$III)$ $(\forall t \in I)$ $(\forall x \in P_2 \backslash \overset{\circ}{P_1})$ $\dot{V}(t, x) \leq 0$;

Si de plus $t_0 \in I$, $x_0 \in P_1$, alors pour tout $t \geq t_0$, $x(t; t_0, x_0)$ est définie et appartient à P_2.

Démonstration
Pour simplifier, nous écrirons, dans la démonstration $x(t)$ à la place de $x(t; t_0, x_0)$.

Supposons qu'il existe un $t^* > t_0$ tel que $x(t^*) \notin P_2$. Alors on sait qu'il existe deux instants τ_1 et $\tau_2 \in I$ tels que $\tau_1 < \tau_2 < t^*$, que $x(\tau_1) \in FrP_1$, $x(\tau_2) \in FrP_2$ et que pour $t \in [\tau_1, \tau_2]$; $x(t) \in P_2 \backslash \overset{\circ}{P_1}$.

On obtient alors en utilisant successivement les hypothèses (III), (II) et (I), la chaîne d'inégalités

$$V(\tau_2, x(\tau_2)) \leq V(\tau_1, x(\tau_1)) < \mathbf{a} \leq V(\tau_2, x(\tau_2)),$$

ce qui est absurde.

Remarque 2.1.2

Pour que cette démonstration soit valable, il n'est pas nécessaire que V soit définie sur la totalité de $I \times B'_\sigma$. Il suffit qu'elle le soit sur un voisinage de tout point par où passe $x(t; t_0, x_0)$ pour $t \geq t_0$.

#Ce lemme conduit à une généralisation intéressante du théorème de stabilité uniforme de Liapounov.

Théorème 2.1.3

S'il existe une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $V : I \times (B'_\sigma \backslash \{0\}) \to \mathbb{R}$; $(t, x) \mapsto V(t, x)$, et pour tout ε ; $0 < \varepsilon < \sigma$, deux compacts $P_1(\varepsilon)$, $P_2(\varepsilon)$ tels que

$$\{0\} \subset \overset{\circ}{P_1} \subset P_1 \subset \overset{\circ}{P_2} \subset P_2 \subset B_\varepsilon$$

Si de plus, pour chacun de ces ε, il existe un $\mathbf{a}(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ tel que

$I)$ $(\forall t \in I)$ $(\forall x \in FrP_2)$ $V(t, x) \geq \mathbf{a}$;

$II)$ $(\forall t \in I)$ $(\forall x \in FrP_1)$ $V(t, x) < \mathbf{a}$;

$III)$ $(\forall t \in I)$ $(\forall x \in P_2 \backslash \overset{\circ}{P_1})$ $\dot{V}(t, x) \leq 0$;

Alors l'origine est uniformément stable.

La preuve est une conséquence immédiate du lemme2.1.1.

#Montrons que le théorèmes 2.1.3 généralise le théorème de stabilité uniforme de Liapounov.

Soit $V(t, x)$ une fonction de Liapounov et soit $\mathbf{a}(r)$ et $\mathbf{b}(r)$ deux fonctions de classe K telles que $\mathbf{a}(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \mathbf{b}(\|x\|)$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on choisira $\eta(\varepsilon)$ tel que $\|x\| \leq \eta \Rightarrow V(t, x) < \mathbf{a}(\varepsilon)$. Il suffira alors de choisir $P_1 = \{x : \|x\| \leq \eta\}$ et $P_2 = \{x : \|x\| \leq \varepsilon\}$.

Exemple

Considérons le système différentiel défini par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + r x_1 \sin \dfrac{1}{r} \\ \dot{x}_2 = x_1 + r x_2 \sin \dfrac{1}{r} \end{cases}$$

pour $r \neq 0$, $r = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}$, et par $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ pour $r = 0$.

On vérifie sans peine que le second membre est continu et localement lipschitzien sur $\mathbb{R}^2$. Choisissons une fonction V définie sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ par

$V(x_1, x_2) = \sin \dfrac{1}{r}$. On calcul $\dot{V}(x_1, x_2) = -\sin \dfrac{1}{r} \cos \dfrac{1}{r}$. Si on écrit

$$r_1 = \frac{1}{(2k + \frac{3}{2})\pi} \quad ; \quad r_2 = \frac{1}{(2k+1)\pi}$$

pour tout k entier positif, on a $V(r_1) = -1 \quad ; \quad V(r_2) = 0 \quad ; \quad \dot{V}(r) \leq 0$ pour $r_1 \leq r \leq r_2$. Le théorème 2.1.3 est applicable avec $P_1 = \{x : \|x\| \leq r_1\}$,

$P_2 = \{x : \|x\| \leq r_2\}$ et $\mathbf{a} = V(r_2) = 0$. L'origine est donc uniformément stable.

On voit que ni la fonction V, ni sa dérivée $\dot{V}$ ne sont de signe semi-défini ; elles prennent les deux signes dans tout voisinage de l'origine.

2.2 La méthode de comparaison

Pour comparer la stabilité d'un point critique d'une équation différentielle vectorielle à celle d'un point critique d'une équation differentielle scalaire appropriée, nous utilisons le théorème suivant.

Théorème 2.2.1

Soit un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$, une fonction continue $\omega : \Omega \to \mathbb{R}$, $(t, y) \mapsto \omega(t, y)$, localement lipschitzienne en y, et l'équation différentielle

$$\dot{y} = \omega(t, y) \qquad (II.2)$$

Soient $(t_0, y_0) \in \Omega$ et $y(t)$ une solution de $(II.2)$ définie sur un intervalle $]t_1, t_2[$ contenant t_0, avec $y(t_0) = y_0$. Soit $v(t)$ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$, définie sur $]t_1, t_2[$ avec $v_0 = v(t_0)$ et $(t_0, v_0) \in \Omega$. Si

$$\begin{aligned} v_0 &\leq y_0 \qquad (II.3) \\ & et \\ \forall t &\in [t_0, t_2[\;;\; \dot{v}(t) \leq \omega(t, v(t)) \qquad (II.4) \end{aligned}$$

alors

$$\forall t \in [t_0, t_2[\;;\; v(t) \leq y(t) \qquad (II.5)$$

Démonstration

Supposons que $(II.5)$ soit inexacte. Il existe alors un $\tau \in]t_0, t_2[$ tel que $v(\tau) > y(\tau)$ et un $\tau' \in [t_0, \tau[$ tel que $v(\tau') = y(\tau')$ et que, $\forall t \in]\tau', \tau] : v(t) > y(t)$.

Posons $z(t) = v(t) - y(t)$. On a donc

$$z(\tau') = 0, \quad et \quad \forall t \in]\tau', \tau] : \; z(t) > 0 \qquad (II.6)$$

Il existe un voisinage de $(\tau', y(\tau'))$ sur lequel on a une constante de Lipschitz L (pour ω). Choisissons $\tau" \in]\tau', \tau]$,.assez proche de τ' pour que, quel que soit $t \in]\tau', \tau"]$, les deux points $(t, y(t))$ et $(t, v(t))$ appartiennent à ce voisinage. Alors grâce à $(II.2)$ et $(II.4)$, on a

$$\begin{aligned} \forall t &\in [\tau', \tau"] \;;\; \dot{z}(t) \leq \omega(t, v(t)) - \omega(t, y(t)) \\ &\leq |\omega(t, v(t)) - \omega(t, y(t))| \\ &\leq L\,|z(t)| = Lz(t) \end{aligned}$$

Dans le même intervalle de temps, on a donc

$e^{-Lt}(\dot{z}(t) - Lz(t)) \leq 0$ ou encore $\dfrac{d}{dt}(e^{-Lt}z(t)) \leq 0$. La fonction $e^{-Lt}z(t)$ est donc décroissante sur $[\tau', \tau"]$. Puisque $z(\tau') = 0$, on a $z(t) \leq 0$ sur $[\tau', \tau"]$, ce qui contredit $(II.6)$.

Le théorème suivant généralise les conditions suffisantes de stabilité asymptotique de Liapounov.

Théorème 2.2.2

Soient $f : I \times B_\rho \to \mathbb{R}^n$; $(t,x) \mapsto f(t,x)$, une fonction continue, localement lipschitzienne en x, telle que $f(t,0) \equiv 0$; et l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t,x) \qquad (II.7)$$

Soient une fonction continue $\omega : I \times]-\rho, \rho[\to \mathbb{R}$; $(t,y) \mapsto \omega(t,y)$, localement lipschitzienne en y, telle que $\omega(t,0) \equiv 0$, et l'équation différentielle

$$\dot{y} = \omega(t,y) \qquad (II.8)$$

Soit une fonction $V : I \times B_\rho \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto V(t,x)$ de classe $\mathcal{C}^1$, avec $V(t,0) \equiv 0$, satisfaisant pour tout $(t,x) \in I \times B\rho$, à l'inégalité différentielle

$$\dot{V}(t,x) \leq \omega(t, V(t,x)) \qquad (II.9)$$

Si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont deux fonctions de classe K, considérons les deux inégalités

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{a}(\|x\|) & \leq & V(t,x) & \qquad (A) \\ V(t,x) & \leq & \mathbf{b}(\|x\|) & \qquad (B) \end{array}$$

1) L'inégalité (A) et la stabilité de l'origine pour $(II.8)$ entraînent la stabilité de l'origine pour $(II.7)$.

2) Les inégalités (A) et (B) et la stabilité uniforme de l'origine pour $(II.8)$ entraînent la stabilité uniforme de l'origine pour $(II.7)$.

3) L'inégalité (A) et la stabilité asymptotique de l'origine pour $(II.8)$ entraînent la stabilité asymptotique de l'origine pour $(II.7)$.

4) Les inégalités (A) et (B) et la stabilité asymptotique uniforme de l'origine pour $(II.8)$ entraînent la stabilité asymptotique uniforme de l'origine pour $(II.7)$.

Démonstration

Démontrons d'abord le 1). La stabilité de l'origine pour $(II.8)$ implique que

$$\begin{array}{rcl} (\forall \varepsilon & : & 0 < \varepsilon < \rho)(\forall t_0 \in I)(\exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0), (\forall y_0 : |y_0| < \delta), \\ \forall t & \geq & t_0, y(t; t_0, y_0) \text{ est définie et } \|y(t; t_0, y_0\| < \mathbf{a}(\varepsilon) \end{array} \qquad (II.10)$$

(Remarquons qu'on a écrit à la fin de cette proposition $\mathbf{a}(\varepsilon)$ et non ε).

A cause de la continuité de V, il existe un $\eta(t_0, \varepsilon) > 0$ tel que $\|x_0\| < \eta(t_0, \varepsilon)$ entraîne $V(t_0, x_0) < \delta$. Choisissons donc un tel x_0 et ensuite un y_0 tel que $V(t_0, x_0) < y_0 < \delta$.

La première de ces inégalités, jointe à $(II.9)$ où on remplace x par $x(t;t_0,x_0)$, montre en vertu du théorème 2.2.1 que pour tout $t \geq t_0$;

$$V(t,x(t;t_0,x_0)) \leq y(t;t_0,y_0) \qquad (II.11)$$

Puisque $y(t;t_0,y_0) < \mathbf{a}(\varepsilon)$, on a $V(t,x(t;t_0,x_0)) \leq \mathbf{a}(\varepsilon)$ et donc $\|x(t;t_0,x_0)\| < \varepsilon$; ce qui montre que l'origine de $(II.7)$ est stable.

Le 2) vient du fait que δ peut être choisi indépendant de t_0, et qu'alors, grâce à (B), il en va de même de η.

Montrons maintenant le 3). Puisqu'on a la stabilité, il ne reste à montrer que l'attractivité. Supposons pour cela que δ dans $(II.10)$ ait été choisi assez petit pour jouer le rôle du symbole δ de la définition de l'attractivité (Def. 1.2.3). Alors $y(t;t_0,y_0) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Les inégalités $(II.11)$ et (A) impliquent que

$$\mathbf{a}(\|x(t;t_0,x_0)\|) \leq y(t;t_0,y_0) \qquad (II.12)$$

Il s'en suit que $x(t;t_0,x_0) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

Pour le 4) on remarque d'abord qu'on a la stabilité uniforme. Il ne reste à montrer que l'attractivité uniforme.

Supposons comme ci-dessus que δ dans $(II.10)$ ait été choisi assez petit pour jouer le rôle du symbole δ de la définition de l'attractivité uniforme (Def. 1.2.3). Alors $y(t;t_0,y_0) \to 0$ quand $t \to +\infty$, uniformément en t_0 et y_0. Donc pour $\mu > 0$ il, existe un $T(\mu) > 0$ tel que $t \geq t_0 + T(\mu)$ implique que $|y(t;t_0,y_0)| < \mathbf{a}(\mu)$. Alors en vertu de l'inégalité $(II.12)$, toujours valable, dès que

$|y(t;t_0,y_0)| < \mathbf{a}(\mu)$, on a $\mathbf{a}(\|x(t;t_0,x_0)\|) \leq \mathbf{a}(\mu)$ et donc $\|x(t;t_0,x_0)\| \leq \mu$.

On en conclut que dès que $\|x_0\| \leq \eta$, $\ x(t;t_0,x_0) \to 0$ quand $t \to +\infty$, uniformément en t_0 et x_0.

Cas particulier

Si on choisit $\omega \equiv 0$, l'inégalité $(II.9)$devient $\dot{V}(t,x) \leq 0$ et on retrouve, à la place du 1) du théorème 2.2.2, le théorème de Liapounov sur la stabilité. De même le 2) ne serait que la proposition sur la stabilité uniforme (thé.1.4.5 et son corollaire.

Choisissons maintenant $\omega(t,y) = -\mathbf{c}(y)$; où $\mathbf{c}$ est une fonction de classe K. Alors $(II.9)$ devient $\dot{V}(t,x) \leq -\mathbf{c}(V(t,x))$, d'où encore à cause de (A),

$\dot{V}(t,x) \leq -\mathbf{c}(\mathbf{a}(\|x\|))$. Or la fonction $\mathbf{c} \circ \mathbf{a}$ est aussi de classe K et donc $\dot{V}$ est définie-négative. Le 4) du théorème 2.2.2 redonne aussi le théorème de la stabilité asymptotique uniforme.

Exemple

Considérons pour $x \in \mathbb{R}^n$, l'équation différentielle

$$\dot{x} = (Id \sin t + A(t))x \qquad (II.13)$$

où Id est la matrice unité d'ordre n et $A(t)$ est une matrice également d'ordre n, définie et continue sur $I =]\tau, +\infty[$, et antisymétrique. La fonction auxiliaire $V(x) = (x/x)$ a pour dérivée temporelle

$$V(t,x) = 2(x/x)\sin t = 2V(x)\sin t,$$

fonction qui n'est pas semi-définie négative. Mais pour l'équation scalaire $\dot{y} = 2y \sin t$, l'origine $y \equiv 0$ est uniformément stable, comme en témoigne son intégrale

$$y = y_0 \exp 2(\cos t_0 - \cos t).$$

On peut donc utiliser le théorème 2.2.2 pour conclure à la stabilité uniforme de l'origine pour l'équation $(II.13)$.

2.3 Le théorème de LaSalle sur les ensembles invariants

Dans cette section on se limitera au cas des équations autonomes.

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n \quad ; \quad x \mapsto f(x)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, une fonction localement lipschitzienne, et

$$\dot{x} = f(x) \qquad (II.14)$$

l'équation différentielle qui lui est associée. Nous noterons $x(t-t_0, x_0)$ la solution exprimée en fonction des conditions initiales. Pour une valeur donnée de x_0, elle est définie comme fonction de $t-t_0$ sur un intervalle ouvert maximal $J(x_0) \subset \mathbb{R}$. Pour simplifier, nous poserons $t - t_0 = \tau$.

Définition 2.3.1

On appellera orbite passant par x_0 l'ensemble

$$\gamma(x_0) = \{x(\tau, x_0) : \tau \in J(x_0)\}$$

On appelle semi-orbite positive issue de x_0 l'ensemble

$$\gamma^+(x_0) = \{x(\tau, x_0) : \tau \in J(x_0) \ , \ \tau \geq 0\}$$

On appelle ensemble invariant une réunion d'orbites. C'est donc un ensemble tel que, si x_0 lui appartient, $x(\tau, x_0)$ lui appartient aussi quel que soit $\tau \in J(x_0)$.

On appelle ensemble positivement invariant un ensemble tel que, si x_0 lui appartient, $x(\tau, x_0)$ lui appartient aussi quel que soit $\tau \in J(x_0)$, $\tau \geq 0$. C'est évidemment une réunion de semi-orbites positives.

Définition 2.3.2

Soit $x_0 \in \Omega$ et $J(x_0) =]\alpha, \omega[$. On appelle point limite positif associé à x_0, tout point $r \in \mathbb{R}^n$ pour lequel il existe une suite $\tau_1, \tau_2, ...$ telle que $\tau_i \to \omega$ et $x(\tau_i, x_0) \to r$ quand $i \to +\infty$.

Il est clair que si $x_0' \in \gamma(x_0)$, tout point limite positif associé à x_0 est aussi associé à x_0' et réciproquement.

C'est pourquoi on parlera sans ambiguïté de point limite positif associé à une orbite γ.

Un point limite appartient à $\mathbb{R}^n$ mais pas forcément à Ω.

Définition 2.3.3

On appelle ensemble limite positif d'une orbite γ, et on note $\Lambda^+(\gamma)$, l'ensemble des points limites positifs associés à γ.

Nous admettons l'abus de langage consistant à écrire $\Lambda^+(x_0)$ au lieu de $\Lambda^+(\gamma(x_0))$.

Proposition 2.3.4

On a $\overline{\gamma^+(x_0)} = \gamma^+(x_0) \cup \Lambda^+(x_0)$.

Démonstration

1) On sait que $\gamma^+(x_0) \subset \overline{\gamma^+(x_0)}$. D'autre part, par définition de l'adhérence, $\Lambda^+(x_0) \subset \overline{\gamma^+(x_0)}$. Donc $\gamma^+(x_0) \cup \Lambda^+(x_0) \subset \overline{\gamma^+(x_0)}$.

2) Il reste à établir l'inclusion en sens inverse.

Soit donc un point $x^* \in \overline{\gamma^+(x_0)}$. Ceci veut dire qu'il existe une suite $\tau_1, \tau_2, ...$, avec $\tau_i \geq 0$, telle que $x(\tau_i, x_0) \to x^*$ quand $i \to +\infty$. Si $\tau_i \to \omega$ quand $i \to +\infty$ alors $x^* \in \Lambda^+(x_0)$.

Au cas contraire, $\tau_1, \tau_2, ...$ contient une sous suite infinie $\tau'_1, \tau'_2, ...$, bornée par un nombre $\tau' < \omega$. Cette sous suite est telle que $x(\tau'_i, x_0) \to x^*$ quand $i \to +\infty$. Mais comme elle est infinie et bornée, elle contient une sous suite convergente $\tau''_1, \tau''_2, ...$ Supposons que $\tau''_i \to \tau''$ quand $i \to +\infty$. Alors par raison de continuité $x(\tau''_i, x_0) \to x(\tau'', x_0) = x^*$, quand $i \to +\infty$.

Puisque , $0 \leq \tau'' \leq \omega$, on a $x^* \in \gamma^+(x_0)$.

Proposition 2.3.5

On a .

$$\Lambda^+(x_0) = \bigcap_{x'_0 \in \gamma(x_0)} \overline{\gamma^+(x'_0)} \qquad (II.15)$$

Démonstration

La proposition 2.3.4 permet d'écrire $\overline{\gamma^+(x'_0)} = \gamma^+(x'_0) \cup \Lambda^+(x'_0) = \gamma^+(x'_0) \cup \Lambda^+(x_0)$.

On a ensuite

$$\bigcap_{x'_0 \in \gamma(x_0)} \overline{\gamma^+(x'_0)} = \bigcap_{x'_0 \in \gamma(x_0)} [\gamma^+(x'_0) \cup \Lambda^+(x_0)] = \left[\bigcap_{x'_0 \in \gamma(x_0)} \gamma^+(x'_0) \right] \cup \Lambda^+(x_0)$$

Ou bien la solution issue de x_0 est périodique, dans ce cas, le dernier terme entre crochets vaut $\Lambda^+(x_0)$, ou bien ce terme est vide. Dans les deux cas on obtient le résultat annoncé.

Proposition 2.3.6

Si $\Lambda^+(x_0)$ est non vide et borné, alors $x(\tau, x_0) \to \Lambda^+(x_0)$ quand $\tau \to \omega$.

Démonstration

Si tel n'était pas le cas, il existerait un $\varepsilon > 0$ et une suite $\tau_1, \tau_2, ...$, avec $\tau_i \to \omega$ quand $i \to +\infty$, tels que $d(x(\tau_i, x_0), \Lambda^+(x_0)) \geq \varepsilon$. ($d(x(\tau_i, x_0), \Lambda^+(x_0))$ désigne la distance du point $x(\tau_i, x_0)$ à l'ensemble $\Lambda^+(x_0)$)

Puisque l'ensemble des points $x(\tau_i, x_0)$ est borné, il contient une sous suite $x(\tau'_i, x_0)$ convergente : $x(\tau'_i, x_0) \to x^*$ quand $i \to +\infty$. Le point x^* devrait à la fois appartenir à $\Lambda^+(x_0)$ et se trouver à une distance supérieure à ε de cet ensemble, ce qui est absurde.

Théorème 2.3.7

Si $\gamma^+(x_0)$ est bornée, $\Lambda^+(x_0)$ est non vide et compact.

Démonstration

En effet les ensembles $\overline{\gamma^+(x'_0)}$ mentionnés dans la proposition 2.3.5 sont des compacts. En choisissant une suite de x'_{0i} appropriés sur $\gamma(x_0)$, on peut remplacer l'intersection au second membre de $(II.15)$ par

$$\bigcap_{1\leq i<+\infty} \overline{\gamma^+(x'_{0i})} \quad \text{avec} \quad \overline{\gamma^+(x'_{0j})} \subset \overline{\gamma^+(x'_{0i})} \qquad \text{pour } i<j$$

On conclut que $\Lambda^+(x_0)$ est compact non vide, comme intersection d'une suite décroissante de compacts non vides.

Théorème 2.3.8

$\Lambda^+(x_0) \cap \Omega$ est invariant.

Démonstration

Soit $r \in \Lambda^+(x_0) \cap \Omega$. Il existe donc une suite de $\tau_i \in]\alpha, \omega[$ tels que $\tau_i \to \omega$ et $x(\tau_i, x_0) \to r$ quand $i \to +\infty$. On a certainement $\omega = +\infty$, car si non, r étant un point intérieur de Ω, $x(\tau, x_0)$ pourrait être prolongée au delà de ω. Il reste à montrer que, quel que soit $\tau' \in J(r)$; $x(\tau'_i, r) \in \Lambda^+(x_0)$. Pour i assez grand, $\tau_i + \tau' \geq 0$ et $x(\tau_i + \tau', x_0)$ est à coup sûr définie. Puisque $x(\tau_i + \tau', x_0) = x(\tau', x(\tau_i, x_0))$, on voit que, par raison de continuité $x(\tau_i + \tau', x_0) \to x(\tau', r)$ quand $i \to +\infty$, ce qui montre bien que $x(\tau', r) \in \Lambda^+(x_0)$.

Exemples d'ensembles limites positifs

1) Soit le système dans $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \dot{x} = k \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

où $k \neq 0$. Pour toutes ses orbites, les ensembles limites sont vides.

2) Soit le système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

L'origine est un point critique. Pour cette orbite particulière qu'est le point critique, l'ensemble limite positif est le point lui même. Les autre orbites sont radiales autour de l'origine dans le plan (x, y). Chacune d'elles admet l'origine pour ensemble limite positif.

3) Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - (x^2 + y^2 - 1)x \\ \dot{y} = x - (x^2 + y^2 - 1)y \end{cases}$$

Il admet l'origine pour point critique. En dehors de l'origine, on étudie ses orbites en passant aux coordonnées polaires planes $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, pour lesquelles on obtient deux équations séparées.

$$\begin{cases} \dot{r} = -r(r^2 - 1) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Il en résulte qu'une des orbites est le cercle de rayon $r_0 = 1$, centré à l'origine et parcouru avec une vitesse angulaire égale à 1. Ce cercle est son propre ensemble limite positif. Les orbites intérieures au cercle s'approchent en spirale vers le cercle quand $t \to -\infty$; et tendent en spirale vers le cercle quand $t \to +\infty$. Le cercle est l'ensemble limite positif pour chacune d'elles. De même toutes les orbites extérieures au cercle tendent en spirale vers lui quand $t \to +\infty$. Elles admettent également le cercle comme ensemble limite positif.

Lemme 2.3.9

Soit une fonction $V : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\dot{V}$ sa dérivée temporelle le long des solutions de $(II.14)$. Si $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout $x \in \Omega$, alorspour tout $x_0 \in \Omega$, V est constante sur $\Lambda^+(x_0) \cap \Omega$.

Démonstration

En effet, soient y et $y' \in \Lambda^+(x_0) \cap \Omega$.. Il existe deux suites (τ_i) et (τ_i') tendant vers ω et telles que $x(\tau_i, x_0) \to y$ et $x(\tau_i', x_0) \to y'$ quand $i \to +\infty$. Puisque V est continue, $V(y) = \lim V(x(\tau_i, x_0))$ et $V(y') = \lim V(x(\tau_i', x_0))$. Mais $V(x(\tau, x_0))$ est décroissante et tend donc vers une limite quand $\tau \to \omega$. (limite qui peut être finie ou infinie). Cette limite est évidemment égale à $V(y)$ et $V(y')$, qui sont donc égaux.

Théorème 2.3.10 (Théorème de LaSalle)

Soit l'équation $(II.14)$ et un ensemble compact $\Psi \subset \Omega$. Soit $V : \Omega \to \mathbb{R}$, $x \to V(x)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\forall x \in \Psi$; $\dot{V}(x) \leq 0$ .Notons $E = \{x \in \Psi \ : \ \dot{V}(x) = 0\}$ et soit M le plus grand sous ensemble invariant de E. Alors pour tout x_0 tel que $\gamma^+(x_0) \subset \Psi$, $x(\tau, x_0) \to M$ quand $\tau \to +\infty$.

Démonstration

Puisque $V(x)$ est constante sur $\Lambda^+(x_0)$ et que ce dernier ensemble est invariant, $\dot{V}(x) = 0$ sur $\Lambda^+(x_0)$. Donc $\Lambda^+(x_0) \subset M$. Puisque Ψ est compact, $\Lambda^+(x_0)$, qui est inclus dans Ψ, est compact. Donc $x(\tau, x_0) \to \Lambda^+(x_0)$. quand $\tau \to +\infty$ (proposition 2.3.6) et enfin $x(\tau, x_0) \to M$ quand $\tau \to +\infty$.

Corollaire

Si Ψ est positivement invariant, toute solution partant de Ψ tend vers M quand $t \to +\infty$.

Proposition 2.3.11

Pour que Ψ soit positivement invariant, il suffit qu'il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que $\Psi = \{x \in \Omega \ : \ V(x) \leq a\}$.

Démonstration

Ceci résulte immédiatement de la condition $\dot{V}(x) \leq 0$. qui se trouve dans l'énoncé du théorème.

Remarques

a) Notons que l'ensemble positivement invariant $\{x \in \Omega \ : \ V(x) \leq a\}$ ne peut être assimilé à l'ensemble Ψ du théorème que s'il est de plus compact.

b) Si M se réduit à l'origine des coordonnées, le théorème 2.3.10 et son corollaire peuvent servir à montrer que l'origine est attractive et à estimer son domaine d'attraction.

Théorème 2.3.12

Soit l'équation $(II.14)$ avec $\Omega = \mathbb{R}^n$ et Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \to V(x)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, minorée telle que $V(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on ait $\dot{V}(x) \leq 0$. Notons $E = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \dot{V}(x) = 0\}$ et soit M le plus grand sous ensemble invariant de E. Alors toutes les solutions, quand $t \to +\infty$, sont bornées et tendent vers M.

Démonstration

Soit x_0 quelconque dans $\mathbb{R}^n$. Posons $V(x_0) = a$. L'ensemble

$\{x \ : V(x) \leq a\}$ est fermé borné, donc il est compact. Désignons-le par Ψ. Nous savons également que Ψ est positivement invariant (proposition 2.3.11).

Soit $E' = \{x \in \Psi \ : \ \dot{V}(x) = 0\}$ et soit M' le plus grand sous ensemble invariant contenu dans E'. Le théorème 2.3.10 implique que $x(\tau, x_0) \to M'$ quand $\tau \to +\infty$. Donc $x(\tau, x_0) \to M$ quand $\tau \to +\infty$, puisque $M' \subset M$.

Exemple

Considérons l'équation $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0$, c'est l'équation d'un oscillateur harmonique amorti par une force de frottement visqueux, où m, h et k sont trois constantes strictement positives. Elle fournit le système du premier ordre ;

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\dfrac{k}{m}x - \dfrac{h}{m}y \end{cases}$$

On utilise comme fonction auxiliaire (l'énergie totale) $V(x,y) = \dfrac{1}{2}my^2 + \dfrac{1}{2}mx^2$.

Sa dérivée temporelle le long des solutions du système vaut $\dot{V}(x,y) = -hy^2$. (c'est la puissance dissipée par les forces de frottement). Elle est nulle partout où la vitesse y est nulle. Le théorème 2.3.12 peut être appliqué. L'ensemble E se réduit à l'axe des x, et l'ensemble M à l'origine. En effet les équations différentielles font voir qu'en tout point où $y = 0$, $x \neq 0$, la trajectoire passant par ce point coupe orthogonalement l'axe des x. Toutes les solutions sont donc bornées et tendent vers l'origine quand $t \to +\infty$.

2.4 Un théorème de Matrosov utilisant deux fonctions auxiliaires

Nous entamons ici l'exposé d'un théorème de Matrosov donnant des conditions suffisantes de stabilité asymptotique uniforme de l'origine pour une équation non autonome. Nous avons déjà exposé un résultat de ce type, dans la première partie de ce cours, en utilisant une fonction de Liapounov. Ici, nous considérons deux fonctions auxiliaires, en exigeant moins de chacune d'elles.

Considérons l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t,x) \qquad (II.16)$$

dont le second membre est continu et localement lipschitzien en x sur $I \times B_\rho$ et qui admet l'origine pour point critique.

Lemme 2.4.1 (temps de parcours d'une solution)

Soit τ_1 et $\tau_2 \in \mathbb{R}$; $\tau_1 < \tau_2$. Si une solution $x(t)$ de $(II.16)$ est définie sur $[\tau_1, \tau_2]$ et s'il existe un $A > 0$ tel que pour tout $(t,x) \in I \times B_\rho$, on ait $\|f(t,x)\| \leq A$, alors $d(x(\tau_1), x(\tau_2)) \geq r > 0 \Rightarrow \tau_2 - \tau_1 \geq \dfrac{r}{A}$.

Démonstration

On a $d(x(\tau_1), x(\tau_2)) = \|x(\tau_1) - x(\tau_2)\| = \left\| \int_{\tau_1}^{\tau_2} \dot{x}(t)dt \right\| \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\| \dot{x}(t) \right\| dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|f(t, x(t)))\| \, dt \leq A(\tau_2 - \tau_1)$.

Définition 2.4.2

Une fonction $W(t,x)$ définie et continue sur $I \times B'_\chi,\ 0 < \chi < \rho$, sera dite définie non nulle sur un ensemble $E \subset B'_\chi$ si ; à toute paire de nombres

$\nu,\ \varepsilon,\ 0 < \nu < \varepsilon \leq \chi$, correspond une paire de nombres strictement positifs $\sigma(\nu, \varepsilon),\ \xi(\nu, \varepsilon)$ tels que

$$\left.\begin{array}{c} \nu \leq \|x\| \leq \varepsilon \\ d(x, E) < \sigma \\ t \in I \end{array}\right\} \Rightarrow |W(t,x)| > \xi$$

Lemme 2.4.3 (éjection d'une solution)

Soit $W : I \times B_\rho \to \mathbb{R}$; $(t,x) \mapsto W(t,x)$ une fonction bornée, de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons $\dot{W}$ définie non nulle sur un ensemble $E \subset B'_\chi$, pour un certain $\chi,\ 0 < \chi < \rho$. Quel que soit ν et ε ; $0 < \nu < \varepsilon \leq \chi$, notons

$$U = \{x : \nu \leq \|x\| \leq \varepsilon \ ,\ d(x, E) < \sigma\}$$

Une solution $x(t)$ de $(II.16)$ ne peut demeurer dans U pendant un intervalle de temps de longueur $\dfrac{2L}{\xi}$, où

$$L = \sup\{|W(t,x)| : (t,x) \in I \times B'_\chi\}.$$

Démonstration

Soit $x(t_1) \in U$ et $t_2 > t_1$. Si on admet d'abréger $W(t, x(t))$ en $W(t)$, on a :

$$W(t_2) - W(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{W}(\tau) d\tau.$$

Si pour $t \in [t_1, t_2]$; $x(t) \in U$, alors puisque $\dot{W}$ est continue, son signe est invariant et

$$|W(t_1)| + |W(t_2)| \geq \int_{t_1}^{t_2} \left| \dot{W}(\tau) \right| d\tau > \xi(t_2 - t_1).$$

Puisque $|W(t_1)| + |W(t_2)| \leq 2L$, on obtient le résultat.

Théorème 2.4.4

Supposons qu'il existe trois fonctions

$$\begin{array}{rcl} V & : & I \times B_\rho \to \mathbb{R}\ ;\ (t,x) \mapsto V(t,x) \\ W & : & I \times B_\rho \to \mathbb{R}\ ;\ (t,x) \mapsto W(t,x) \\ V^* & : & B_\rho \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto V^*(x) \end{array}$$

toutes trois continues de même que $\dot{V}$ et $\dot{W}$, avec $V(t,0) \equiv \dot{V}(t,0) \equiv 0$; et soit $\varepsilon\ :\ 0 < \varepsilon < \rho$. Si

$I)$ $\forall(t,x)\in I\times B'_\varepsilon$; $\|f(t,x)\|\leq A$

$II)$ V est définie positive sur $I\times B'_\varepsilon$; $V(t,x)\to 0$ uniformément en t, quand $\|x\|\to 0$

$III)$ $\forall(t,x)\in I\times B'_\varepsilon$; $\dot{V}(t,x)\leq V^*(x)\leq 0$

$IV)$ il exista un $L>0$ tel que , $\forall(t,x)\in I\times B'_\varepsilon$; $|W(t,x)|\leq L$

$V)$ $\dot{W}(t,x)$ est définie non nulle sur $E=\{x\in B'_\varepsilon\ :\ V^*(x)=0\}$

alors toutes les solutions telles que $\forall t\geq t_0$; $x(t,t_0,x_0)\in B_\varepsilon$ tendent vers 0 quand $t\to+\infty$.

Démonstration

Montrons par l'absurde qu'il n'existe pas de $\mu>0$ tel que

$$\forall t\geq t_0\ ;\ V(t,x(t))>\mu \qquad (II.17)$$

Si un tel μ existe, choisissons grâce à (II) un $\nu(\mu)$, $\nu<\varepsilon$, tel que

$$\|x\|\leq\nu\Rightarrow V(t,x)<\mu \qquad (II.18)$$

Soient σ et ξ les deux quantités associées à ν et ε dans la définition d'une fonction définie non nulle, appliquée à $\dot{W}(t,x)$. Considérons les deux ensembles (non disjoints)

$$\begin{aligned} U &= \{x:\nu\leq\|x\|\leq\varepsilon\ ,\ d(x,E)<\sigma\} \\ U^* &= \{x:\nu\leq\|x\|\leq\varepsilon\ ,\ d(x,E)\geq\frac{\sigma}{2}\} \end{aligned}$$

On sait (lemme 2.4.3), que $x(t)$ ne peut demeurer dans U pendant un intervalle de temps de longueur $\dfrac{2L}{\xi}$. Soit alors $J=[t_1,t_2]\subset I$, $t_2\geq t_1$, un intervalle ayant cette longueur. L'existence de μ et l'hypothèse selon laquelle x ne quitte pas B_ε implique que

$$\forall t\in J\ ;\ \nu\leq\|x(t)\|\leq\varepsilon \qquad (II.19)$$

Alors de deux chose l'une ;

$a)$ ou bien $\forall t\in J$; $x(t)\in U^*$, alors si on pose $l=\inf\{|V^*(x)|\ ;\ x\in U^*\}>0$, on a grâce à l'hypothèse (III)

$$V(t_2)-V(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\dot{V}(\tau,x(\tau))d\tau\leq\int_{t_1}^{t_2}V^*(x(\tau))d\tau\leq-\frac{2lL}{\xi} \qquad (II.20)$$

$b)$ ou bien il existe $t\in J$ tel que $x(t)\notin U^*$; pour cette valeur de t, $x(t)\in U$. Du lemme 2.4.3 on conclut qu'il existe un autre instant dans J, où la solution n'est pas dans U. Au premier de ces instants, on a donc $d(x,E)<\dfrac{\sigma}{2}$, et au deuxième $d(x,E)\geq\sigma$. La solution x étant continue, on voit qu'il existe dans J deux instants τ_1 et τ_2 tels que $d(x(\tau_1),E)=\dfrac{\sigma}{2}$ et $d(x(\tau_2),E)=\sigma$. On conclut que $d(x(\tau_1),x(\tau_2))=\dfrac{\sigma}{2}$.

Supposons, pour fixer les idées, que $\tau_1 < \tau_2$. On sait, grâce au lemme 2.4.1, que $\tau_2 - \tau_1 > \dfrac{\sigma}{2A}$. Donc

$$V(t_2)-V(t_1) \leq V(\tau_2)-V(\tau_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \dot{V}(\tau, x(\tau))d\tau \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} V^*(x(\tau))d\tau \leq -\frac{l\sigma}{2A} \qquad (II.21)$$

De $(II.20)$ et $(II.21)$ on conclut qu'après un nombre fini d'intervalles tels que J mis bout à bout, V devient négatives, ce qui contredit l'existence de $\mu > 0$ minorant V.

Puisqu'un tel μ n'existe pas et puisque $V(t, x(t))$ est monotone décroissante, $V(t, x(t)) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

Soit $\mathbf{a}(r)$ une fonction de classe K définie sur $[0, \varepsilon]$ et telle que

$V(t, x) \geq \mathbf{a}(\|x\|)$. Puisque par hypothèse x ne peut quitter B'_ε, le fait que $V(t, x(t)) \to 0$ quand $t \to +\infty$ entraîne que $\mathbf{a}(\|x(t)\|) \to 0$ et donc $\|x(t)\| \to 0$ dans les mêmes conditions.

Corollaire 2.4.5

Si on ajoute aux hypothèses du théorème 2.4.4 que

$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall (t, x) \in I \times B_\varepsilon)\ V(t, x) \leq c,$$

alors toutes les solutions $x(t, t_0, x_0)$ telles que $\forall t \geq t_0$; $x(t, t_0, x_0) \in B_\varepsilon$ tendent vers 0 quand $t \to +\infty$, uniformément en t_0 et x_0.

Démonstration

En se rapportant à la démonstration du théorème 2.4.4, on calcule sans peine qu'une majorante du temps nécessaire pour que $V(t, x)$ devienne inférieur à μ est donnée par

$$\frac{V(t_0, x_0)}{\beta} \frac{2L}{\xi} \qquad \text{où} \qquad \beta = \min\left\{\frac{2lL}{\xi}, \frac{l\sigma}{2A}\right\}.$$

Pour rendre cette majorante indépendante de t_0 et x_0, il suffit d'y remplacer $V(t_0, x_0)$ par c.

Théorème 2.4.6

Les hypothèses du théorème 2.4.4 suffisent à assurer la stabilité asymptotique uniforme de l'origine.

Démonstration

Analogue à celle du théorème 1.4.9 (Partie 1), en utilisant le théorème 2.4.4 et le corollaire 2.4.5.

#La proposition suivante évitera à l'utilisateur du théorème 2.4.4 de devoir recourir trop souvent, au moins dans les cas autonomes, à la définition de la fonction définie non nulle sur un ensemble.

Proposition 2.4.7

Une fonction continue $W : B'_\chi \to \mathbb{R}$; $x \to W(x)$ est définie non nulle sur un ensemble $E \subset B'_\chi$ si, et seulement si, pour tout $x \in \overline{E} \backslash \{0\}$; $W(x) \neq 0$.

Démonstration

La condition nécessaire est évidente. Démontrons la condition suffisante. La fonction W étant continue, il existe dans B'_χ considéré comme espace, un voisinage ouvert N de $\overline{E}\backslash\{0\}$, sur lequel $|W(x)|>0$. Choisissons deux nombres ν et ε ; $0<\nu<\varepsilon\leq\chi$. Il est claire que $\overline{E}\cap C_{\frac{\nu}{2},\chi}\subset N$, où

$C_{\frac{\nu}{2},\chi}=\{x:\dfrac{\nu}{2}\leq\|x\|\leq\chi\}$. Le même symbole avec des indices différents aura ci-dessous une signification analogue. Puisque $\overline{E}\cap C_{\frac{\nu}{2},\chi}$ est compact, il existe un $\sigma>0$ tel que $S[\overline{E}\cap C_{\frac{\nu}{2},\chi},\sigma]\subset N$. Ici et ci-dessous, le symbole $S[A,\sigma]$ désigne l'ensemble des x de B'_χ situés à une distance de A inférieure ou égale à σ. Supposons qu'on ait choisi de plus

$$\sigma<\frac{\nu}{2} \qquad (II.22)$$

on a donc

$$\forall x\in S[\overline{E}\cap C_{\frac{\nu}{2},\chi},\sigma]\ ,\ \ |W(x)|>0 \qquad (II.23)$$

Appelons ξ l'inf de $|W(x)|$ sur ce compact. Observons ensuite que l'égalité

$$\overline{E}=\left(\overline{E}\cap C_{\frac{\nu}{2},\chi}\right)\cup\left(\overline{E}\cap B_{\frac{\nu}{2}}\right)$$

implique que

$$S[\overline{E},\sigma]=S[\overline{E}\cap C_{\frac{\nu}{2},\chi},\sigma]\cup S[\overline{E}\cap B_{\frac{\nu}{2}},\sigma].$$

En prenant l'intersection des deux membres par $C_{\nu,\chi}$, et si on teint compte de ce que grâce à $(II.22)$

$$S[\overline{E}\cap B_{\frac{\nu}{2}},\sigma]\cap C_{\nu,\chi}=\phi,$$

on obtient

$$S[\overline{E},\sigma]\cap C_{\nu,\chi}=S[\overline{E}\cap C_{\frac{\nu}{2},\chi},\sigma]\cap C_{\nu,\chi}$$

Donc en vertu de $(II.23)$ sur $S[\overline{E},\sigma]\cap C_{\nu,\chi}$, et à fortiori sur $S[\overline{E},\sigma]\cap C_{\nu,\varepsilon}$;
$|W(x)|>\xi$.

2.5 Attractivité de certains ensembles fermés

Notre étude se limitera ici au cas autonome.

Soit M un fermé de $\mathbb{R}^n$ et $U=\mathbb{R}^n\backslash M$. Considérons l'équation différentielle

$$\dot{x}=f(x) \qquad (II.24)$$

où $f:U\rightarrow\mathbb{R}^n$, $x\rightarrow f(x)$ est localement lipschitzienne. Soit $t-t_0=\tau$ et $x(\tau,x_0)$ la solution maximale de $(II.24)$ telle que $x(0,x_0)=x_0$. On supposera x définie sur $]\alpha,\omega[$, où α et ω peuvent être infinis. Par commodité il nous arrivera ci-après d'écrire $x(\tau)$ au lieu de $x(\tau,x_0)$, γ^+ au lieu de $\gamma^+(x_0)$ et Λ^+ au lieu de $\Lambda^+(x_0)$. V désignera une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $V:U\rightarrow\mathbb{R}$, $x\mapsto V(x)$ et $\dot{V}$ sa dérivée temporelle le long des solutions de $(II.24)$.

Théorème 2.5.1 localisation de l'ensemble limite)

Dans les conditions générales ci-dessus, si

$I)$ $\dot{V}(x)\leq 0$ pour $x\in U$ et $E=\{x\in U:\dot{V}(x)=0\}$;

pour tout $z \in E$, il existe un voisinage $N_z \subset U$ et une fonction
$W_z : N_z \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \mathbb{W}_z(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que
$II)$ $W_z(x) = 0$ sur $N_z \cap E$;
$III)$ $\dot{W}_z(x) \neq 0$ sur N_z (ie. $\dot{W}_z$ est définie non nulle sur N_z)
alors pour toute solution $x(t)$, on a $\Lambda^+ \subset M$.
(N_z joue le rôle de E dans le lemme 2.4.3)

Démonstration

Il suffira de montrer que $\Lambda^+ \cap U = \phi$.

Supposons que ce ne soit pas le cas. Puisque $V(x)$ est constante sur $\Lambda^+ \cap U$ (lemme2.3.9) et que $\Lambda^+ \cap U$ est invariant (th.2.3.8), on voit que $(\Lambda^+ \cap U) \subset E$. Mais l'existence de la famille de fonctions W_z implique que E ne contient aucun sous ensemble invariant. Ceci est la contradiction cherchée.

Remarque 2.5.2

L'énoncé du théorème 2.5.1 n'exclut évidemment pas que la solution $x(t)$ qui s'y trouve mentionnée ait un ensemble limite vide.

Théorème 2.5.3 (comportement des solutions bornées)

Si on pose, outre les hypothèses du théorème 2.5.1, que pour la solution $x(\tau)$, γ^+ est borné, alors $x(\tau) \to M$ quand $\tau \to \omega$.

Démonstration

On sait effectivement que si γ^+ est borné, Λ^+ est non vide et compact (th. 2.3.7). Mais alors $x(\tau) \to \Lambda^+$ quand $\tau \to \omega$ (proposition 2.3.6). Mais $\Lambda^+ \subset M$, et donc, comme annoncé, $x(\tau) \to M$ quand $\tau \to \omega$.

Théorème 2.5.4 (comportement des solutions quelconques)

Ajoutons à celles du théorème 2.5.1, les hypothèses suivantes :

Il existe une fonction continue, strictement positive $\varphi : U \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $\sigma > 0$;

$I)$ $\exists c > 0 : \|\varphi(x)f(x)\| < c$ sur $U \backslash B(M, \sigma)$;

$II)$ $\exists k > 0,\ \exists \varepsilon > 0 :$ si $\|x\| > k,\ x \in U \backslash B(M, \sigma)$, alors $\varphi(x)\dot{V}(x) < -\varepsilon$;

$III)$ $V(x)$ est minorée sur $U \backslash B(M, \sigma)$;

Alors toute solution $x(\tau) \to M$ quand $\tau \to \omega$.

Démonstration

Supposons, au contraire, que $x(\tau)$ ne tend pas vers M quand $\tau \to \omega$. Alors de deux choses l'une ;

$a)$ ou bien il existe deux quantités $\sigma > 0$ et $T^* \in]\alpha, \omega[$ telles que pour tout $\tau \in [T^*, \omega[\ ,\ d(x(\tau), M) > \sigma$. Alors $x(\tau) \to \infty$ quand $\tau \to \omega$, car sinon, il y aurait un point de Λ^+ en dehors de M et le théorème 2.5.1 serait violé. Donc pour T assez grand, $T^* < T < \omega$, et pour les quantités c et ε choisies comme en $I)$ et $II)$, on a

$$\begin{aligned} V(x(\tau)) - V(x(T)) &= \int_T^\tau \dot{V}(x(\theta))d\theta \leq -\varepsilon \int_T^\tau \frac{d\theta}{\varphi(x(\theta))} \leq -\frac{\varepsilon}{c} \int_T^\tau \|f(x(\theta))\| \, d\theta \\ &\leq -\frac{\varepsilon}{c} \left\| \dot{x}(\theta)d\theta \right\| \leq -\frac{\varepsilon}{c} \left\| (x(\tau) - x(T) \right\| . \end{aligned}$$

Donc $V(x(\tau)) \to -\infty$ quand $\tau \to \omega$, ce qui contredit l'hypothèse $III)$.

b) ou bien il existe un $\eta > 0$ tel que pour tout σ, $0 < \sigma < \eta$, on trouve deux suites (t_i) et (τ_i) toutes deux incluses dans $]\alpha, \omega[$, avec $t_i < \tau_i$, $d(x(t_i), M) > \eta$ et $d(x(\tau_i), M) < \sigma$. Choisissons t'_i et τ'_i tels que $t_i < t'_i < \tau'_i < \tau_i$ et que de plus

$$\begin{array}{rcll} d(x(\tau), M) & > & \sigma. & \text{pour} \quad \tau \in [t'_i, \tau'_i[\ , \\ d(x(t'_i), M) & = & \eta. & \\ d(x(\tau_i), M) & = & \sigma. & \end{array}$$

On a que $x(\tau) \to \infty$ quand $\tau \to \omega$, par valeurs comprises dans $\underset{1 \leq i \leq \infty}{\cup} [t'_i, \tau'_i]$, car autrement, il existerait un point de Λ^+ en dehors de M et le théorème 2.5.1 serait violé. Donc pour tout t'_i assez grand, on a

$$V(x(t'_i)) - V(x(\tau'_i)) \leq -\frac{\varepsilon}{c} \left\| (x(t'_i) - x(\tau'_i) \right\| \leq -\frac{\varepsilon}{c}(\eta - \sigma).$$

Puisque $V(x(\tau))$ est monotone décroissante, on obtiendrait que

$V(x(\tau)) \to -\infty$ quand $\tau \to \omega$, ce qui contredit l'hypothèse III).

Remarque 2.5.5

Si dans les hypothèses du théorème 2.5.4, on remplace $U \backslash B(M, \sigma)$ par $N \backslash B(M, \sigma)$, la thèse doit être changée en : toute solution demeurant dans N pour $\tau \geq 0$, tend vers M quand $\tau \to \omega$.

Définition 2.5.6

L'ensemble M sera dit **semi-attracteur** s'il existe un voisinage N de M tel que pour tout $x_0 \in N \backslash M$, la solution issue de x_0 tende vers M quand $\tau \to \omega$.

S'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $N \supset B(M, \varepsilon)$, M est appelé **Attracteur.**

Si $N = \mathbb{R}^n$, M est appelé **Attracteur global.**

Corollaire 2.5.7 (corollaire des théorèmes 2.53 et 2.5.4)

S'il existe un voisinage N de M tel que les hypothèses du théorème 2.5.3 soient satisfaites pour toute solution issue de $N \backslash M$ ou tel que les hypothèses du théorème 2.5.4 (modifiées par la remarque 2.5.5), soient satisfaites, alors M est un semi-attracteur.

Selon les propriétés de N telles qu'indiquées à la définition 2.5.6, M pourra être attracteur ou attracteur global.

(Fin de la deuxième partie et du programe.)

Université A. MIRA - Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques
Module : Stabilité

Série d'exercices N°2

EXO 1 : Soit x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$ et $r = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$. Démontrer la stabilité de l'origine pour le système d'équations différentielles défini par :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -x_1 + rx_2(\sin\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\cos\frac{1}{r}) \end{cases}$$

si $r \neq 0$ et par

$$\begin{cases} \dot{x_1} = 0 \\ \dot{x_2} = 0 \end{cases}$$

pour $r = 0$. Utiliser la fonction auxiliaire $V(x_1, x_2) = \sin\dfrac{1}{r}$

EXO 2 : Soit pour x et $y \in \mathbb{R}$ et n impair, le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x} = y^n - x\varphi(t) \\ \dot{y} = -x^n - y\varphi(t) \end{cases}$$

où $\varphi(t)$ est une fonction réelle et continue, définie sur $\mathbb{R}$. Démontrer que si l'intégrale $\int\limits_{t_0}^{t} \varphi(s)ds$ est bornée pour tout $t \geq t_0$, l'origine est stable, et que si cette intégrale tend vers $+\infty$ quand $t \to +\infty$, l'origine est asymptotiquement stable. Utiliser la fonction auxiliaire $V(x, y) = x^{n+1} + y^{n+1}$ et l'équation scalaire $\dot{z} = -(n+1)\varphi(t)z$.

EXO 3 : Soit le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - xy^2 \\ \dot{y} = -yx^2 - 2y^3 \end{cases}$$

Démontrer

1) que l'origine est asymptotiquement stable.

2) que si $\rho(t)$ est, pour une solution quelconque, le carré de la distance à l'origine, on a

$$\rho(t) \leq \frac{\rho(t_0)}{1 + \rho(t_0)(t - t_0)}.$$

Utiliser la fonction auxiliaire $V(x,y) = x^2 + y^2$ et l'équation scalaire $\dot{z} = -z^2 = \omega(z)$

<u>EXO 4 :</u> Soit l'équation du second ordre

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

(équation de Liénard) ou le système équivalent

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases}$$

où f est un polynôme pair et g est un polynôme impair strictement croissant, et $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Posons en outre $G(x) = \int_0^x g(t)dt$.

Démontrer que s'il existe deux constantes $a > 0$ et $l > 0$ telles que $g(x)F(x) > 0$ pour $|x| < a$, $x \neq 0$, et que $G(x) \leq l$ implique $|x| < a$, alors toute solution issue de $\Omega_l = \left\{(x,y) : \frac{1}{2}y^2 + G(x) < l\right\}$ tend vers l'origine quand $t \to +\infty$.

<u>EXO 5 :</u> Soit pour x et $y \in \mathbb{R}$, le système d'équations

$$\begin{cases} \dot{x} = g(y) + xf(y) \\ \dot{y} = -h(x) - yl(x) \end{cases}$$

Supposons que f, g, h et l soient de classe $\mathcal{C}^1$, définies sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$g(y)y > 0$ pour tout $y \neq 0$

$h(x)x > 0$ pour tout $x \neq 0$

$G(y) = \int_0^y g(t)dt \to \infty$ quand. $|y| \to \infty$

$H(x) = \int_0^x h(t)dt \to \infty$ quand $|x| \to \infty$

$f(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$, $f(0) = 0$

$l(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démontrer que toutes les solutions tendent vers l'origine quand $t \to \infty$.