Université A. MIRA - Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques
Module : Stabilité

Série d'exercices N°1

EXO 1 : En partant de la définition de la stabilité au sens de Liapounov, étudier la stabilité de la solutions du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2t(x+1) \\ x(0) &= 0 \end{aligned}$$

EXO 2 : Soit V de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie positive de degré $m \geq 2$, $[\forall \lambda \in \mathbb{R} : V(\lambda x) = \lambda^m V(x)]$. Montrer que si $W : B'_\sigma \to \mathbb{R}$, définie et continue sur une boule fermée B'_σ est telle que
$(\forall x \in B'_\sigma)$ $|W(x)| \leq r \|x\|^m$ où $0 < r < \inf \{V(x) : \|x\| = 1\}$
alors $U(x) = V(x) + W(x)$ est définie positive sur B'_σ.

EXO 3 : Parmi les fonctions suivantes, définies pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $t \in]0, +\infty[$, quelles sont celles
a) qui sont définies positives;
b) qui sont définies positives et tendent vers 0 uniformément en t quand $\|(x, y)\|$ tend vers 0.

$$\begin{aligned}
V_1(t,x,y) &= x^2 + y^4 + \sin^2 t \\
V_2(t,x,y) &= (x^2+y^2)\exp t \\
V_3(x,y) &= x^2 + 2xy + y^2 \\
V_4(x,y) &= x^2 + 3xy + y^2 \\
V_5(x,y) &= \frac{x^2 + x^2y^2 + y^2}{1+x^2} \\
V_6(t,x,y) &= \frac{x^2}{1+\frac{1}{2}\cos t} + y^2 \\
V_7(x,y) &= \frac{a}{2}(x^2+y^2)^2 + by^2 + cx^2, \qquad a,b,c>0 \\
V_8(x,y) &= \max(x^2, y^2) \\
V_9(t,x,y) &= x(x^2+xy+y^2)\exp t
\end{aligned}$$

EXO 4 : Considérons pour $x \in \mathbb{R}^n$, l'équation différentielle

$$\dot{x} = (D(t) + A(t))x \qquad (1)$$

où $D(t)$ et $A(t)$ sont des matrices définies sur $I =]\tau, +\infty[$, continues, la première diagonale et la seconde antisymetrique. En considérant la fonction auxiliaire $V(x) = (x/x)$, étudier la stabilité de la solution $x \equiv 0$ de (1).

<u>EXO 5 :</u> Etudier la stabilité de la solution de :
1) $3(t-1)\dot{x} = x$; $x(2) = 0$
2) $\dot{x} = t - x$; $x(0) = 1$.

<u>EXO 6 :</u> Soit le système $\begin{cases} \dot{x} = x(y^2 - 1) \\ \dot{y} = y(x^2 - 1) \end{cases}$ (1)

1) Montrer que $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ est une fonction de Liapounov pour ce système.
2) Montrer que $\Delta((0,0), \sqrt{2})$ est un disque positivement invariant.
3) Montrer que $(0,0)$ est asymptotiquement stable.

<u>EXO 7 :</u> Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $t \mapsto a(t)$ une fonction continue et $c \in \mathbb{R}_+^*$, tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a(t) < -c < 0$. Montrer que pour l'équation

$$\ddot{x} + a(t)x = 0$$

l'origine est instable.

<u>EXO 8 :</u> Déterminer les propriétés de stabilité des points critiques du système $\begin{cases} \dot{x} = -x - (1 + \frac{1}{2}\cos t)y \\ \dot{y} = x \end{cases}$

<u>EXO 9 :</u> Pour le système $\begin{cases} \dot{x} = 2x^3y^2 - x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$

1) Montrer que l'origine est uniformément asymtotiquement stable.
2) En utilisant la fonction auxiliaire $V(x,y) = x^2 + y^2$, trouver, s'il existe, le plus grand disque pour lequel on puisse affirmer qu'il est positivement invariant et que toutes les solutions de condition initiale (t_0, x_0) avec x_0 appartenant à ce disque, tendent vers l'origine quand t tend vers $+\infty$.

<u>EXO 10 :</u> Soit le système $\begin{cases} \dot{x} = y^3 + x^5 \\ \dot{y} = x^3 + y^5 \end{cases}$

En utilisant la fonction auxiliaire $V(x,y) = x^4 - y^4$, étudier la stabilité de la solution nulle de ce système.

<u>EXO 11 :</u> On considère le système $\begin{cases} \dot{x} = x^3 + 2xy^2 \\ \dot{y} = x^2y \end{cases}$

En utilisant la fonction auxiliaire $V(x,y) = x^2 - y^2$, étudier la stabilité de son origine.

EXO 12 : Considérons l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

$a)$ Ecrire cette équation sous la forme d'un système.

$b)$ En utilisant la fonction auxiliaire $V(x,y) = x^2 + y^2$, montrer que l'origine est uniformément stable pour $\mu < 0$.

EXO 13 : Etudier la stabilité de l'origine des systèmes suivants

1) $$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - \sin y^2 \\ \dot{y} = -x - 3y + x(\exp \dfrac{x^2}{2} - 1) \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + x^2 \sin y \\ \dot{y} = -x - 4y + 1 - \cos y^2 \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y + x^2 + \dfrac{y^2}{2 + \sin t} \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y + \dfrac{x^2}{1 + \frac{1}{2}\cos t} + y^2 \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + (x^2 \sin y) \arctan t \\ \dot{y} = -x - 4y + (1 - \cos y^2) \sin t \end{cases}$$

EXO 14 : Etudier la stabilité de l'origine du plan des phases $(x, \dot{x})$ pour l'équation différentielle

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \qquad ; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

EXO 15 : Considérons le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x + 2z + 2t^3 + 5t^2 + 2t \\ \dot{y} = 41x + 5y - 19z - 19t^3 - 41t^2 - 10t + 2 \\ \dot{z} = 5x + 2y - 3z - 3t^3 - 8t^2 - 4t \end{cases}$$

1) Vérifier que $x^* = t^2$, $y^* = 2t$, $z^* = -t^3$ est une solution particulière de ce système.

2) Etudier la stabilité de cette solution.

Corrigé de la Série d'exercices N°1

EXO 1 : On a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2t(x+1) \\ x(0) &= 0 \end{aligned}$$

$\frac{dx}{dt} = 2t(x+1) \rightarrow \frac{dx}{x+1} = 2tdt \rightarrow Log\,|x+1| = t^2 + C_1 \rightarrow x+1 = C\exp t^2 \rightarrow x = C\exp t^2 - 1$.

$x(0) = 0$ nous donne $C = 1$. La solution du problème de Cauchy donné est donc $x = \exp t^2 - 1$.

Pour tout $x_0 \neq 0$ on a $x(0) = x_0$, nous donne $C = x_0 + 1$.

Pour tout $x_0 \neq 0$ on a $|x(t;0,x_0) - x(t;0,0| = \left|(x_0+1)\exp t^2 - 1 - \left(\exp t^2 - 1\right)\right| = \left|x_0 \exp t^2\right|$.

$\forall x_0 \neq 0, |x(t;0,x_0) - x(t;0,0| \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$. Donc la solution du problème donné est instable.

EXO 2 : Une forme algébrique de degré m vérifie $(\forall \lambda \in \mathbb{R})\,, V(\lambda x) = \lambda^m V(x)$.

Posons $x = \alpha y$, avec $\alpha > 0$ et $\|y\| = 1$. Il vient

$U(x) = \alpha^m V(y) + W(\alpha y)$. Or si $\alpha y \in B'_\sigma$, on a $|W(\alpha y)| \leq r\,\|\alpha y\|^m = r\alpha^m$.

On obtient donc, pour tout $x \in B'_\sigma$:

$U(x) \geq \alpha^m V(y) - |W(\alpha y)| \geq \alpha^m\,(V(y) - r) \geq \alpha^m\,(l - r) > 0$.

où $l = \inf\{V(x) : \|x\| = 1\}$.

EXO 3 :

1) $V_1(t,x,y) = x^2 + y^4 + \sin^2 t$ n'est pas définie positive car $V_1(t,0,0)$ ne s'annule pas pour tout t.

2) $V_2(t,x,y) = (x^2+y^2)\exp t$ est continue, $V_2(t,0,0) \equiv 0$ et $\forall t > 0$ on a $V_2(t,x,y) \geq (x^2+y^2) = W(x,y)$

$W(x,y)$ est définie positive, donc V_2 est définie positive.

Pour tout t_0 fixé, $\forall \varepsilon > 0, \|(x,y)\| < \dfrac{\varepsilon}{\exp t_0} \Rightarrow (x^2+y^2)\exp t_0 < \varepsilon$. $V_5(t,x,y)$ tend vers 0 quand $\|(x,y)\|$ tend vers 0, mais pas uniformément pour $t > 0$.

3) $V_3(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ n'est pas définie positive car $V_3(x,-x) = 0$ pour tout x.

4) $V_4(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$ n'est pas définie positive car

$V_4(x,-x) = -x^2 \leq 0$. (< 0 pour $x \neq 0$)

5) $V_5(x,y) = \frac{x^2+x^2y^2+y^2}{1+x^2}$ est continue, $V_5(0,0) = 0$ et $\forall (x,y) \neq (0,0)$,

$V_5(x,y) > 0$, V_5 est donc définie positive.

V_5 ne dépend pas de t et tend vers 0 quand $\|(x,y)\|$ tend vers 0, donc V_5 tend vers 0 quand $\|(x,y)\|$ tend vers 0 uniformément pour $t > 0$.

6) $V_6(t,x,y) = \frac{x^2}{1+\frac{1}{2}\cos t} + y^2$ est continue, $V_6(t,0,0) \equiv 0$ et $\forall t > 0$ on a $V_6(t,x,y) \geq (\dfrac{2}{3}x^2 + y^2) = W(x,y)$.

$W(x,y)$ est définie positive, donc V_6 est définie positive.

$\forall (t,x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$ on a $V_6(t,x,y) = \frac{x^2}{1+\frac{1}{2}\cos t} + y^2 \leq 2x^2 + y^2$ et

$2x^2 + y^2 \to 0$ quand $\|(x,y)\| \to 0$, donc V_6 tend vers 0 quand $\|(x,y)\|$ tend vers 0 uniformément pour $t > 0$

7) $V_7(x,y) = \frac{a}{2}(x^2+y^2)^2 + by^2 + cx^2, \qquad a,b,c > 0$

$V_7(x,y)$ est continue, $V_7(0,0) = 0$ et $\forall (x,y) \neq (0,0),\ V_7(x,y) > 0$, V_7 est définie positive.

V_7 ne dépend pas de t et tend vers 0 quand $\|(x,y)\|$ tend vers 0, donc V_7 tend vers 0 quand $\|(x,y)\|$ tend vers 0 uniformément pour $t > 0$.

8) $V_8(x,y) = \max(x^2, y^2)$. V_8 est la composée des fonctions continues

$f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ et $g : (x,y) \mapsto \max(|x|, |y|)$, donc V_8 est continue.

$V_8(0,0) = 0$ et $\forall (x,y) \neq (0,0),\ V_8(x,y) > 0$, V_8 est donc définie positive.

V_8 ne dépend pas de t et tend vers 0 quand $\|(x,y)\|$ tend vers 0, donc V_8 tend vers 0 quand $\|(x,y)\|$ tend vers 0 uniformément pour $t > 0$.

9) $V_9(t,x,y) = x(x^2+xy+y^2)\exp t$. $V_9(t,x,x) = 3x^3 \exp t < 0$ pour tout $x < 0$. Donc V_9 n'est pas définie positive.

EXO 4 : On a

$$\dot{x} = (D(t) + A(t))x \tag{1}$$

$V(x) = (x/x)$ est définie positive.

$\dot{V}(t,x) = (2x/D(t)x) = 2(x/D(t)x)$ ce qui peut encore s'écrire si $D = diag(d_1, ..., d_n)$

$$\dot{V}(t,x) = 2d_1(t)x_1^2 + ... + 2d_n(t)x_n^2$$

Si pour $i = 1, ..., n$ et $t \in I$; $d_i(t) \leq 0$, l'origine est uniformément stable en vertu du th.1.4.5 et de son corollaire.

S'il existe $a < 0$ tel que dans les mêmes conditions $d_i(t) \leq a$, l'origine est uniformément asymptotiquement stable en vertu du th.1.4.9.

EXO 5 : 1) On a

$3(t-1)\dot{x} = x \qquad ; \quad x(2) = 0.$

$x \equiv 0$ est une solution. Pour $x \neq 0$ et $t \neq 1$ on a

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{3(t-1)} \to \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dt}{3(t-1)} \to Log\,|x| = Log\,|t-1|^{\frac{1}{3}} + LogC$

$\to x(t) = C\,|t-1|^{\frac{1}{3}}$.

$x(2) = 0 \to x(t) \equiv 0$.

Soit $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$; $\forall C > 0, \exists t^*$ tq $t > t^* \Rightarrow C\,|t-1|^{\frac{1}{3}} > \dfrac{1}{2}$. Donc la solution $x \equiv 0$ est instable.

2) On a

$\dot{x} = t - x \qquad ; \quad x(0) = 1.$

Cette équation est linéaire, on sait que toutes ses solutions sont de même nature du point de vue de la stabilité ; et elles sont de même nature que les solutions de l'équation sans second membre, associée

$$\dot{x} = -x. \qquad (E)$$

On examine les solutions de cette dernière. $x \equiv 0$ est une solution de (E). Pour $x \neq 0$ on a
$\frac{dx}{dt} = -x \rightarrow \frac{dx}{x} = -dt \rightarrow Log\,|x| = -t + C_1 \rightarrow x(t) = C \exp -t.$

Toutes les solutions de (E) tendent vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Donc toutes les solutions de (E) et par suite toutes les solutions de l'équation donnée, sont asymptotiquement stables. En particulier la solution du problème de Cauchy donné est asymptotiquement stable.

<u>EXO 6 :</u> On a le système $\begin{cases} \dot{x} = x(y^2-1) \\ \dot{y} = y(x^2-1) \end{cases} \qquad (1)$

1) Montrons que $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ est une fonction de Liapounov pour ce système.

La fonction V est de classe au moins $\mathcal{C}^1$. $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ est définie positive.

$\dot{V}(x,y) = \big((x,y)/x(y^2-1), y(x^2-1)\big) = x^2(y^2-1) + y^2(x^2-1)$
$= -(x^2+y^2-2(x^2y^2)$.

$\dot{V}(x,y) \leq 0$ pour tout $(x,y) \in \Delta((0,0),\sqrt{2})$. Donc V est une fonction de Liapounov, pour le système (1), sur Δ.

2) Le disque ouvert $\Delta((0,0),\sqrt{2})$ est positivement invariant.en vertu du lemme 1.4.2 et de la remarque 1.4.3 (avec $a = 1$).

3) L'origine est asymptotiquement stable.(sur le disque Δ) en vertu du th.1.4.9.

<u>EXO 7 :</u> On a

$$\ddot{x} + a(t)x = 0$$

Cette équation est équivalente au système

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -a(t)x \end{cases} \qquad (1)$$

Posons $V(x,y) = xy$ il vient

$\dot{V}(x,y) = ((x,y)/y, -a(t)x) = -a(t)x^2 + y^2 \geq cx^2 + y^2.$

La fonction $\dot{V}$ est donc définie positive. Sur le domaine ψ égale à l'intersection du premier quadrant $(x > 0\ , y > 0)$ avec la boule ouverte $B_1 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2) < 1\big\}$,on a $V(x,y) > 0$ et $\dot{V}(x,y) > 0$ et toutes les hypothèses du th.1.5.1 sont vérifiées, donc l'origine du système (1) est instable.

EXO 8 : Le système $\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = -x - (1 + \dfrac{1}{2}\cos t)y \\ \dot{y} = x \end{array}\right.$ admet un seul point critique c'est $(x, y) = (0, 0)$.

$V(t, x, y) = \frac{x^2}{1+\frac{1}{2}\cos t} + y^2$ est définie positive (Exo3). La dérivée temporelle de V le long des solutions du système (1) est

$$\dot{V}(t, x, y) = \left((\frac{2x}{1 + \frac{1}{2}\cos t} + 2y)/(-x - (1 + \tfrac{1}{2}\cos t)y, x \right) + \frac{x^2 \sin t}{2(1 + \frac{1}{2}\cos t)^2}$$
$$= \frac{-2x^2}{1 + \frac{1}{2}\cos t} - 2xy + 2xy + \frac{x^2 \sin t}{2(1 + \frac{1}{2}\cos t)^2}$$
$$= \frac{-x^2}{1 + \frac{1}{2}\cos t}\left(2 - \frac{\sin t}{2(1 + \frac{1}{2}\cos t)}\right) \leq 0.$$

$\dot{V}(t, 0, y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$, donc $\dot{V}$ n'est pas définie négative, elle est semi-définie négative. De plus V tend vers 0 quand $\|(x, y)\|$ tend vers 0 uniformément pour $t > 0$ (Exo3). On en déduit que l'origine du système (1) est uniformément stable.

EXO 9 : On a le système $\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = 2x^3y^2 - x \\ \dot{y} = -y \end{array}\right.$ (1)

1) $(0, 0)$ est un point singulier. Si on linéarise ce système autour de l'origine on obtient l'équation linéaire

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (2)$$

C'est de la forme $\dot{X} = AX$. La matrice A possède une valeur propre double, $\lambda = -1 < 0$. Donc l'origine du système (1) est asymptotiquement stable.

2) $V(x, y) = x^2 + y^2$ est définie positive.

$\dot{V}(x, y) = \big((2x, 2y)/(2x^3y^2 - x, -y)\big)$
$= -2x^2 + 4x^4y^2 - 2y^2 = -2(x^2 + y^2 - 2x^4y^2)$.

Pour étudier le signe de $\dot{V}$ posons $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. On obtient alors $\dot{V} = -2(r^2 - 2r^6\cos^4\theta\sin^2\theta) = -2r^2\left(1 - 2r^4\dfrac{\cos^2\theta\sin^2 2\theta}{4}\right)$.

Pour $0 < r \leq 2^{\frac{1}{4}}$, on a $\dot{V}(x, y) \leq 0\ \forall\theta$.

Posons $\Gamma = B((0, 0), 2^{\frac{1}{4}})$, Γ est positivement invariant en vertu du lemme 1.4.2 et de la remarque 1.4.3. De plus on a $V(x, y)$ tend vers 0 quand $\|(x, y)\|$ tend vers 0 et $\dot{V}$ est définie négative sur B'_σ pour $\sigma < 2^{\frac{1}{4}}$. Donc d'après le th. 1.4.8, toutes les solutions de condition initiale (t_0, x_0) avec x_0 appartenant à Γ, tendent vers l'origine quand t tend vers $+\infty$.

EXO 10 : On a le système $\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = y^3 + x^5 \\ \dot{y} = x^3 + y^5 \end{array}\right.$

et la fonction auxiliaire $V(x,y) = x^4 - y^4$.

Pour (x,y) : $|x| > |y|$ on a $V(x,y) > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque et posons

$$\psi = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > |y| \text{ et } x > 0\right\} \cap B_\varepsilon$$

ψ est un domaine. Si on calcule $\dot{V}$ on obtient $\dot{V}(x,y) = 4(x^8 - y^8)$. Nous obtenons alors

$\forall (x,y) \in \psi, V(x,y) > 0$

$\forall (x,y) \in \psi, \dot{V}(x,y) > 0$

$\forall (x,y) \in (Fr\psi \cap B_\varepsilon), V(x,y) = 0$

L'origine $(0,0) \in Fr\psi$

Les hypothèses du théorème de Tchétaev (th.1.5.1) sont vérifiées, l'origine est instable.

<u>EXO 11 :</u> On a le système $\begin{cases} \dot{x} = x^3 + 2xy^2 \\ \dot{y} = x^2 y \end{cases}$

et la fonction auxiliaire $V(x,y) = x^2 - y^2$.

Pour (x,y) : $|x| > |y|$ on a $V(x,y) > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque et posons

$$\psi = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > |y| \text{ et } x > 0\right\} \cap B_\varepsilon$$

ψ est un domaine. Si on calcule $\dot{V}$ on obtient $\dot{V}(x,y) = 2x^4 + 2x^2y^2)$. Nous obtenons alors

$\forall (x,y) \in \psi, V(x,y) > 0$

$\forall (x,y) \in \psi, \dot{V}(x,y) > 0$

$\forall (x,y) \in (Fr\psi \cap B_\varepsilon), V(x,y) = 0$

L'origine $(0,0) \in Fr\psi$

Les hypothèses du théorème de Tchétaev (th.1.5.1) sont vérifiées, l'origine est instable.

<u>EXO 12 :</u> On a l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \qquad (E)$$

$a)$ Le système associé s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x \end{cases} \qquad (S)$$

.

$b)$ $V(x,y) = x^2 + y^2$, est définie positive.

$\dot{V}(x,y) = ((2x, 2y)/\left(y, \mu(1-x^2)y - x\right)) = 2\mu y^2(1 - x^2)$.

$\dot{V}(x,0) = 0$, donc n'est pas définie négative. Pour $\mu < 0$, $\dot{V}(x,y)$ est semi-définie négative sur la boule ouverte $B(0,1)$, donc l'origine est stable. De plus

$V(x,y)$ tend vers 0 quand $\|(x,y)\|$ tend vers 0, donc l'origine est uniformément stable.

EXO 13 : Etudier la stabilité de l'origine des systèmes suivants

1) $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - \sin y^2 \\ \dot{y} = -x - 3y + x(\exp \dfrac{x^2}{2} - 1) \end{cases}$ (1)

$(0,0)$ est un point singulier. Si on linéarise ce système autour de l'origine on obtient l'équation linéaire

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

C'est de la forme $\dot{X} = AX$.

Les valeurs propres de la matrice A sont, $\lambda_1 = -1 - \sqrt{2}$ et $\lambda_2 = -1 + \sqrt{2}$. $\lambda_2 > 0$ donc l'origine du système (1) est instable.

2) $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + x^2 \sin y \\ \dot{y} = -x - 4y + 1 - \cos y^2 \end{cases}$ (2)

$(0,0)$ est un point singulier. Si on linéarise ce système autour de l'origine on obtient l'équation linéaire

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

C'est de la forme $\dot{X} = AX$.

Les valeurs propres de la matrice A sont, $\lambda_1 = \dfrac{-5 - i\sqrt{3}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{-5 + i\sqrt{3}}{2}$. $Re\lambda_1 = Re\lambda_2 = \dfrac{-5}{2} < 0$ donc l'origine du système (2) est asymptotiquement stable.

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y + x^2 + \dfrac{y^2}{2 + \sin t} \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y + \dfrac{x^2}{1 + \frac{1}{2}\cos t} + y^2 \end{cases}$ (3)

$(0,0)$ est un point singulier. Si on linéarise ce système autour de l'origine on obtient l'équation linéaire

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

C'est de la forme $\dot{X} = AX + f(t,X)$.

On a $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\|\to 0} \frac{\|f(t,x,y)\|}{\|(x,y)\|} = \lim_{\|(x,y)\|\to 0} \frac{\left\|(x^2 + \dfrac{y^2}{2+\sin t}, \dfrac{x^2}{1+\frac{1}{2}\cos t} + y^2)\right\|}{\|(x,y)\|}$

$$= \lim_{\|(x,y)\|\to 0} \frac{\left|x^2 + \frac{y^2}{2+\sin t}\right| + \left|\frac{x^2}{1+\frac{1}{2}\cos t} + y^2\right|}{|x|+|y|} = \lim_{\|(x,y)\|\to 0} \frac{\left|x^2 + \frac{y^2}{2+\sin t} + \frac{x^2}{1+\frac{1}{2}\cos t} + y^2\right|}{|x|+|y|}$$
$$\leq \lim_{\|(x,y)\|\to 0} \frac{\left|3x^2+2y^2\right|}{|x|+|y|} \leq \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{|x|} + \lim_{y\to 0} \frac{2y^2}{|y|} = 0.$$

Donc $\dfrac{\|f(t,x,y)\|}{\|(x,y)\|}$ tend vers 0 quand $\|(x,y)\|$ tend vers 0 uniformément pour t.

Les valeurs propres de la matrice A sont,

$\lambda_1 = -1 - i\sqrt{2}$ et $\lambda_2 = -1 + i\sqrt{2}$,.. $Re\lambda_1 = Re\lambda_1 = -1 < 0$ donc l'origine du système (3) est uniformément asymptotiquement stable.

4) $$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + (x^2 \sin y) \arctan t \\ \dot{y} = -x - 4y + (1-\cos y^2) \sin t \end{cases} \tag{4}$$

$(0,0)$ est un point singulier. Si on linéarise ce système autour de l'origine on obtient l'équation linéaire

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

C'est de la forme $\dot{X} = AX + f(t,X)$.

On a $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\|\to 0} \frac{\|f(t,x,y)\|}{\|(x,y)\|} = \lim_{\|(x,y)\|\to 0} \frac{\left\|((x^2\sin y)\arctan t, (1-\cos y^2)\sin t)\right\|}{\|(x,y)\|}$

$$= \lim_{\|(x,y)\|\to 0} \frac{\left|(x^2\sin y)\arctan t\right| + \left|(1-\cos y^2)\sin t\right|}{|x|+|y|}$$
$$\leq \lim_{\|(x,y)\|\to 0} \frac{\left|(x^2\sin y)\right|\frac{\pi}{2} + \left|(1-\cos y^2)\right|}{|x|+|y|}$$
$$\leq \lim_{\|(x,y)\|\to 0} \frac{\left|(x^2\sin y)\right|\frac{\pi}{2}}{|y|} + \frac{\left|(1-\cos y^2)\right|}{|y|} = 0.$$

Donc $\dfrac{\|f(t,x,y)\|}{\|(x,y)\|}$ tend vers 0 quand $\|(x,y)\|$ tend vers 0 uniformément pour t.

Les valeurs propres de la matrice A sont,

$\lambda_1 = \dfrac{-5 - i\sqrt{3}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{-5 + i\sqrt{3}}{2}$,.. $Re\lambda_1 = Re\lambda_1 = -\dfrac{5}{2} < 0$ donc l'origine du système (4) est uniformément asymptotiquement stable.

<u>EXO 14 :</u> On a

$$\begin{aligned} \ddot{x} + a\dot{x} + bx &= 0 \qquad (E) \\ a, b &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

En posant $y = \dot{x}$, $\dot{y} = \ddot{x}$, l'équation (E) est équivalente au système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -bx - ay \end{cases} \tag{S}$$

qui s'écrit encore

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (S)$$

C'est de la forme $\dot{X} = AX$, où A est une matrice réelle et constante. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$. Etudions les signes de $Re\lambda_1$ et $Re\lambda_2$. Les cas suivants se présentent.

$$1)\ a^2 - 4b < 0 \rightarrow \begin{cases} a > 0 & \text{stabilité asymptotique} \\ a < 0 & \text{instabilité} \\ a = 0 & \text{stabilité} \end{cases}$$

$$2)\ a^2 - 4b = 0 \rightarrow \begin{cases} a > 0 & \text{stabilité asymptotique} \\ a < 0 & \text{instabilité} \\ a = 0 & \text{instabilité} \end{cases}$$

$$3)\ a^2 - 4b > 0 \rightarrow \begin{cases} b > 0 \text{ et } a > 0 & \text{stabilité asymptotique} \\ b > 0 \text{ et } a < 0 & \text{instabilité} \\ b = 0 \text{ et } a > 0 & \text{instabilité} \\ b = 0 \text{ et } a < 0 & \text{instabilité} \\ b < 0 & \text{instabilité } \forall a \end{cases}$$

EXO 15 : Considérons le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x + 2z + 2t^3 + 5t^2 + 2t \\ \dot{y} = 41x + 5y - 19z - 19t^3 - 41t^2 - 10t + 2 \\ \dot{z} = 5x + 2y - 3z - 3t^3 - 8t^2 - 4t \end{cases} \qquad (S)$$

1) Il est facile de vérifier que $x^* = t^2$, $y^* = 2t$, $z^* = -t^3$ est une solution particulière de ce système.

2) Ce système est linéaire, on sait que toutes ses solutions sont de même nature du point de vue de la stabilité ; et elles sont de même nature que les solutions du système linéaire sans second membre, (S_0), associé

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x + 2z \\ \dot{y} = 41x + 5y - 19z \\ \dot{z} = 5x + 2y - 3z \end{cases} \qquad (S_0)$$

C'est de la forme $\dot{X} = AX$. avec $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 41 & 5 & -19 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ La matrice A possède une seule valeur propre, $\lambda = -1 < 0$. Donc le système (S) est asymptotiquement stable ; en particulier la solution $(x^*, y^*,\ z^*)$ est asymptotiquement stable.