Chapitre 1

Introduction aux systèmes dynamiques discrets

1.1 Généralités

Un système dynamique discret est un couple (X, F).

Le premier élément X est un espace métrique compact. L'ensemble X est dit espace des phases.

Le second élément f est une application continue vérifiant $f(X) \subset X$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit l'itéré $f^n = \underbrace{f \circ ... \circ f}_{n}$; on note $Id = f^0$. Comme $f^{n+m} = f^n \circ f^m$, les itérés de f forment un groupe si f est inversible et un semi-groupe dans le cas contraire.

Exemple 1 *1- Soit $X = [-4, 4]$ et la fonction continue définie par $f(x) = x^2$ Le couple (X, F) n'est pas un système dynamique.*

2- Soit $X = [-1, 1]$ et la fonction continue $f(x) = x^2$ (X, F) Le couple (X, F) est un système dynamique.

1.1.1 Points fixes et points périodiques

Définition 2 *L'ensemble* $\left\{f^k(x) : k \geq 0\right\}$ *des itérés positifs de* x *est dit orbite de* x *et on note* $\theta(x)$ *.*

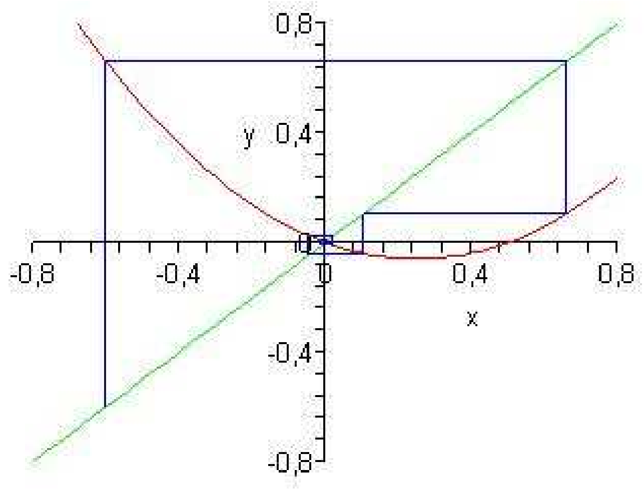
Définition 3 *1- Un point* $x \in X$ *est un point fixe si* $f(x) = x$.
2- Un point x *est périodique s'il existe* $k \in N$ *tel que* $f^k(x) = x$ *. Le plus petit entier vérifiant cette propriétée est nommé période de* x.
3- Soit x *un point périodique de période* k. *L'ensemble* $\{f^i(x) : 0 \leq i \leq k-1\}$ *est appelé un cycle d'ordre* k.
4- Un point x *est dit ultimement périodique si* $f^m(x)$ *est périodique pour un certain* $m \geq 0$.

1.1.2 Motivation géométrique des itérations d'une fonction réelle

Dans cette section on considère le cas d'une fonction continue définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset I$.

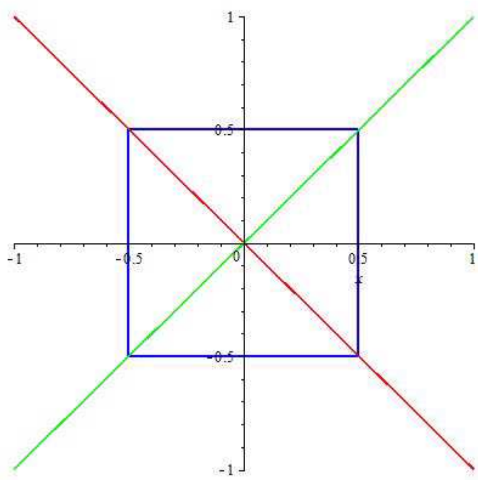
Soit x_0 un point quelconque, pour trouver son image $f(x_0)$ sur l'axe des abcisses Il faut procéder comme suit :
A partir du point x_0, le segment portée par la droite $y = f(x_0)$ coupe la première bissectrice au point $(f(x_0), f(x_0))$ il suffit ensuite de faire une projection verticale pour obtenir $f(x_0)$ et ainsi de suite.

Exemple 4 *On considèrela fonction* $g(x) = x^2 - 0.5x$ *et le point initial* $x_0 = -0.6$. *Dans* *le graphes suivant on verra l'application du processus itératif .*



En partant de $x_0 = -0.6$ *la suite converge vers le point fixe* 0.

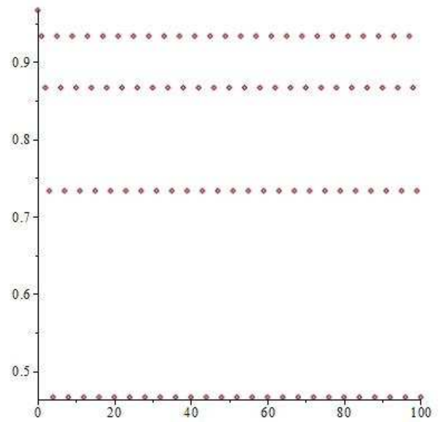
Exemple 5 *La fonction* $f(x) = -x$ *admet un seul point fixe* $r = 0$. *Les autres points sont périodiques de période 2.*



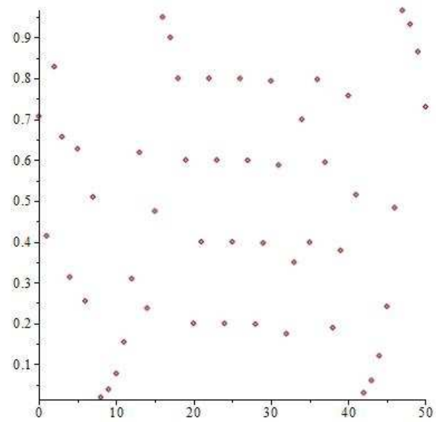
1.1.3 Graphe d'une orbite

Nous allons à présent tracer le graphe de différentes orbites. Dans ce graphe on pose sur l'axe des x l'indice de l'itéré $x_i = f^i(x_0)$ et sur l'axe des y la valeur x_i.

Si le graphe se décline sous forme de lignes horizontales cela implique que le point est périodique.



Orbite ultimement périodique du point $\frac{29}{30}$



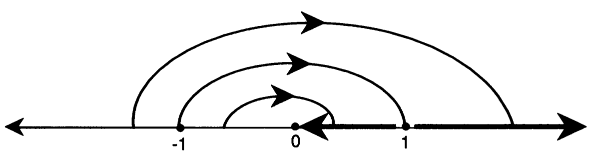
Orbite du point $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (Non périodique)

1.1.4 Portrait de phases

Les informations que nous avons obtenus dans les exemples précédents peuvent être regroupés dans un graphe appelé portait de phases.

Un portrait de phases est une représentation graphique de la dynamique d'un système. Elle consiste en un diagramme représentant les positions initiales possibles du système et des flèches symbolisant les changement en matière d'itérations.

Exemple 6 *Portrait de phases de la récurrence* $x_{n+1} = (x_n)^2$

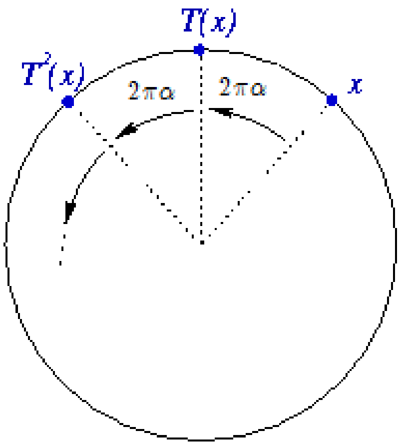


1.1.5 Quelques systèmes dynamiques classiques

Les rotations

La rotation d'angle $\theta_0 = 2\pi\alpha$ correspond à effectuer successivement le produit par $x_0 = \exp(2i\pi\alpha)$ dans le cercle unité.

Soit $x = \exp(2i\pi\theta)$ on a alors $T_\alpha(x) = x_0 x = \exp(2i\pi(\alpha + \theta))$.



Comme la période de rotation est 2π on se contente par abus de langage de parler de rotation d'angle α.Une rotation R d'angle $\alpha \in [0,1[$ est la fonction définit sur $[0,1[$ par : $R_\alpha(x) = (x + \alpha) \bmod 1$.

Remarque 7 *On peut démontrer par récurrence que :* $R_\alpha^n(x) = (x + n \times \alpha) \bmod 1$.

Proposition 8 *Soit R_α une rotation d'angle α, on a alors :*

1- Si $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$ alors tous les points sont périodiques.

2- Si $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \cap [0,1[$ alors il n'existe aucun point périodique.

Preuve. 1- Si $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$ alors il existe $(p,q) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)$ tel que $\alpha = \dfrac{p}{q}$avec $(p \wedge q) = 1$ (p et q premier entre eux).

En évaluant $f_\alpha^q(x)$ on obtient :

$$f_\alpha^q(x) = (x + q \times \frac{p}{q}) \bmod 1 = (x+p) \bmod 1 = x$$

Ainsi x est un point périodique et sa période est un diviseur de q.

2- Si $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \cap [0,1[$. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe un point périodique x on alors :

$$\exists p \in \mathbb{N} : x = f^p(x) = (x + p \times \alpha) \bmod 1$$

D'où on obtient

$$(p \times \alpha) \bmod 1 = 0 \Rightarrow \exists p' : p \times \alpha = p' \Rightarrow \alpha = \frac{p'}{p}$$

alors $\alpha \in \mathbb{Q}$ ce qui constitue une contradiction. ■

La fonction doublement de période [1]

La fonction doublement de période est obtenue en élevant au carré sur le cercle unité.

Soit $x = \exp(2i\pi\theta)$ en l'élevant au carré on obtient $x^2 = \exp(2i\pi(2\theta))$ .Comme la période de rotation est 2π on définit alors la fonction B par :

$$\forall x \in [0,1[: B(x) = 2x \bmod 1 \Longleftrightarrow B(x) = \begin{cases} 2x : si\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ 2x - 1 : si\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[\end{cases}$$

Remarque 9 *On peut démontrer par récurrence que :* $B^n(x) = 2^n x \bmod 1$.

[1] **Dite aussi récurrence de Baker dans certains ouvrages.**

Remarque 10 *Nous allons chercher les points périodiques de la fonction doublement de période.*
Pour trouver analytiquement les points périodiques nous allons d'abord effectuer un développement en base 2.

$$x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\Rightarrow x = \sum_{2}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} \Rightarrow f(x) = 2\sum_{2}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = \sum_{2}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i-1}} = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_{i+1}}{2^i}$$

$$\begin{aligned} x \quad &\in \quad \left[\frac{1}{2}, 1\right] \Rightarrow x = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} \text{ où } a_1 = 1. \\ &\Rightarrow \quad f(x) = 2\sum_{1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} - 1 = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i-1}} - 1 = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_{i+1}}{2^i} - 1 = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_{i+1}}{2^i} \end{aligned}$$

Points fixes

On commence par chercher les points fixes dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right[$.

- Résoudre l'équation $x = f(x)$ revient à résoudre $\sum_{2}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_{i+1}}{2^i}$ cette équation possède une solution dans le cas où $\forall i : a_i = 0$ d'où on a un point fixe $x = 0$.
- On cherche les points fixes dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
  Résoudre l'équation $x = f(x)$ revient à résoudre $\sum_{1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_{i+1}}{2^i}$ avec $a_1 = 1$. cette équation possède une solution dans le cas où $\forall i : a_i = 1$ d'où on a un point fixe $x = 1$.

Cycles de périodes 2

Les points périodiques de période 2 vérifient l'équation $f^2(x) = x$. De plus si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ alors $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et vis versa.

Ainsi il suffit de chercher les points $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ qui vérifient l'équation $f^2(x) = x$.

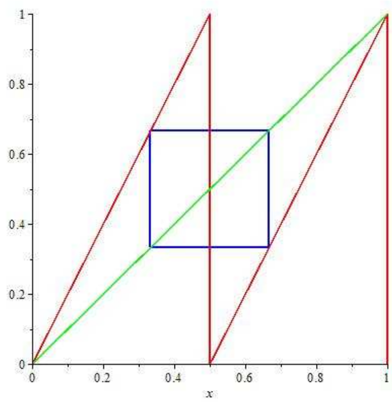
Les développement périodique de période 2 dans la base 2 s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sum_1^\infty \frac{a_i}{2^i} : où\ \forall i, a_i = 0 \Rightarrow x_1 = 0. \\
x_2 &= \sum_1^\infty \frac{a_i}{2^i} : où\ \forall i, a_i = 1 \Rightarrow x_2 = 1. \\
x_3 &= \sum_1^\infty \frac{a_i}{2^i} : où\ \forall i, a_{2i} = 1, a_{2i+1} = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} ... \Rightarrow x_3 = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \\
x_4 &= \sum_1^\infty \frac{a_i}{2^i} : où\ \forall i, a_{2i} = 0, a_{2i+1} = 1 \Rightarrow x_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} ... \Rightarrow x_4 = \frac{1}{2}\sum_0^\infty \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Nous avons donc retrouvé les deux points fixes et deux autres points.
Si on remplace dans la fonction on constate que

$$f(x_3) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} = x_4\ et\ f(x_4) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} = x_3$$

Le graphe ci dessous permet de confirmer géométriquement nos résultats.En rouge : Graphe de la fonction où les discontinuités sont reliés.En vert : Première bissectrice

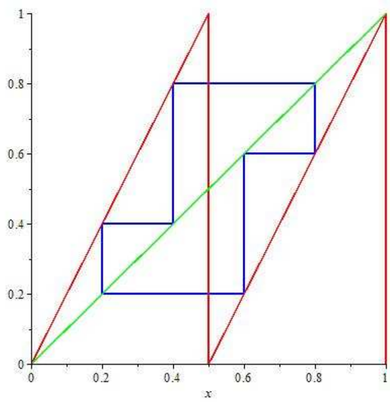


Cycle de période 2 (En bleu) pour la fonction de Baker $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$.

Cycles de périodes p

D'une façon générale tout point avec développement binaire périodique de période p est un point périodique de période p pour la fonction de Baker.Ainsi on conclut que les points périodiques sont les rationnels de $[0,1]$ et les points non périodiques sont les irrationnels de $[0,1]$

Le graphe ci dessous montre les points périodiques de période 4.



Cycle de période 4 (En bleu) pour la fonction de Baker $\{0.2, 0.4, 0.8, 0.6\}$

1.2 Décalage de Bernoulli

L'ensemble des suites infinies à droite ayant pour termes des éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est noté par $A^{\mathbb{N}}$.

L'ensemble des suites doublement infinis ayant pour termes des éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est noté par $A^{\mathbb{Z}}$.

Equipé de la distance $d(x,y) = 2^{-n}$ avec $n = min\{i \geq 0 : x_i \neq y_i \ \ ou \ \ x_{-i} \neq y_{-i}\}$ (resp. $A^{\mathbb{Z}}$ équipé de la distance $d(x,y) = 2^{-n}$ avec $n = min\{i \geq 0 : x_i \neq y_i\}$) est un espace topologique compact séparé.

Définition 11 *L'application shift ou décalage définie sur l'ensemble $A^{\mathbb{N}}$ (resp.$A^{\mathbb{Z}}$) dans*

$A^{\mathbb{N}}$(resp.$A^{\mathbb{Z}}$) est définie par :

$$\sigma(x)_i = x_{i+1}$$

Remarque 12 *Il est clair de la définition que l'application shift est bijective.*

1.2.1 Points fixes et périodiques de la fonction décalage

Les points fixes de la fonction décalage doivent vérifier $\sigma(x) = x$. par définition de la fonction on doit avoir

$$\forall i \in \mathbb{N} \ : x_i = \sigma(x)_i = x_{i+1} \Rightarrow \exists a \in A : \forall i \in \mathbb{N} \ : x_i = a.$$

Ainsi le nombres de points fixes de la fonction décalage est égal au cardinal de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Les points périodiques de période 2 de la fonction décalage doivent vérifier la condition :

$$\forall i \in \mathbb{N} \ : x_i = \sigma^2(x)_i = x_{i+2} \Rightarrow \exists a, b \in A : \forall i \in \mathbb{N} \ : x_i = a, x_{i+1} = b.$$

Ainsi les points périodiques sont issus des combinaisons possibles de deux éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

On peut généraliser se résultat à un point périodique de période p quelconque qui sont issus des combinaisons possibles de p éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1.2.2 Théorème de Sharkovsky (1964).

Définition 13 *On définit l'ordre de Sharkovski sur les entiers naturels non nuls comme suit :*

$$\begin{aligned}
&3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd 9...\\
&\rhd 3.2 \rhd 5.2 \rhd 7.2 \rhd 9.2...\\
&\rhd 3.2^n \rhd 5.2^n \rhd 7.2^n \rhd 9.2^n \rhd ...\\
&\rhd 2^n \rhd 2^{n-1}.... \rhd 4 \rhd 2 \rhd 1.
\end{aligned}$$

Théorème 14 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue ayant un point périodique de période n.*
Pour tout m vérifiant $n \rhd m$, la fonction f admet un point périodique de période m.

1.3 Stabilité au sens de Lyapunov

Définition 15 *Soit (X, f) un système dynamique.*
1- Un point fixe $x \in X$ est stable si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in B_{\delta}(x), \forall n \geq 0, d(f^{n}(y), x) < \epsilon$.
2-Un point fixe $x \in X$ est attractif s'il vérifie :

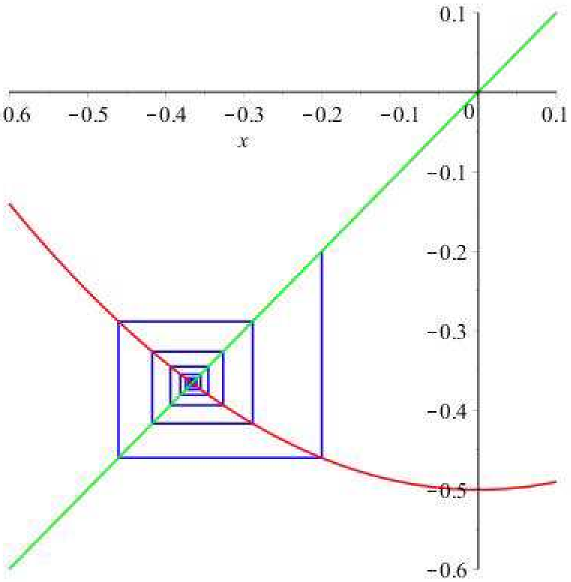
$$\exists \delta > 0, \forall y \in B_{\delta}(x), \lim_{n \to \infty} d(f^{n}(y), x) = 0.$$

3- Un point fixe est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.
4- Un point fixe est instable s'il n'est pas stable.

Remarque 16 *Un cycle d'ordre k est dit stable (resp. attarctif, asymptotiquement stable) si l'un de ses points est stable (resp. attarctif, asymptotiquement stable) en tant que point fixe de l'application f^{k}.*

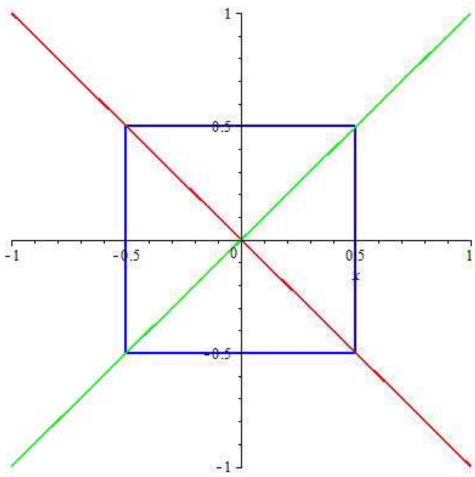
Exemple 17 (Point fixe asymptotiquement stable) *.*
La fonction $g(x) = x^{2} - 0.5x$ possède deux points fixes $x_{1}^{*} = 0$ et $x_{2}^{*} = 1.5$.
Dans les graphes suivants on verra l'application du processus itératif à plusieurs condi-

tions.



En partant de $x_0 = -0.2$ *la suite des itérés converge vers le point fixe* 0.

Exemple 18 *Le système dynamique* $([-1,1], -x)$ *admet un seul point fixe égal à 0. Les autres points sont tous périodiques de période 2. Le point fixe* 0 *est stable mais non attractif.*



1.4 Critères de stabilité des SDD sur l'intervalle.

On considère les systèmes dynamiques définis par une fonction d'une variable réelle sur un intervalle. Ces systèmes dynamiques sont appelés souvent récurrences de dimension 1 ou encore transformations ponctuelles.

1.4.1 Stabilité des points fixes

Proposition 19 *Soit $x_{n+1} = f(x_n)$ une récurrence admettant un point fixe x^*. Si f est dérivable on a alors :*
1- Si $|f'(x^*)| < 1$ alors r est un point fixe attractif.
2- Si $|f'(x^*)| > 1$ alors r est un point fixe instable.

Preuve. Exercice. ∎

Définition 20 *Un point fixe x^* de la récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ est semi-stable à droite si :*

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < x_0 - x^* < \delta \Rightarrow \forall n > 0 : x_n - x^* < \epsilon$$

Si en plus on a :

$$\exists \delta > 0 : 0 < x_0 - x^* < \delta \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = x^*$$

Le point est dit semi asymptotiquement stable à droite. On définit d'une façon similaire la semi-stabilité à gauche et la semi-stabilité asympototique à gauche.

Proposition 21 *Soit $x_{n+1} = f(x_n)$ une récurrence admettant un point fixe x^*. On suppose que $f \in C^{n+1}(I)$*
Si $f'(x^*) = 1$ on considère la première n-ième dérivée non nulle en x^* qu'on notera $f^n(x^*) \neq 0$ on a alors :
1-i) Si n est impair et $f^n(x^*) < 0$ alors x^* est asymptotiquement stable.
ii) Si n est impair et $f^n(x^*) > 0$ alors x^* est instable.
2- Si n est pair alors x^* est instable. Le point fixe sera :

i) Semi stable à droite si $f^n(x^*) < 0$.

ii) Semi stable à gauche si $f^n(x^*) > 0$.

Preuve. En effectuant un développement de Taylor au voisinage du point fixe on obtient

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x^* &= f(x_n) - f(x^*) = f'(x^*)(x_n - x^*) + \frac{f^n(x^*)}{n!}(x_n - x^*)^n + R \\ &\simeq (x_n - x^*) + \frac{f^n(x^*)}{n!}(x_n - x^*)^n \Rightarrow \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} \simeq 1 + \frac{f^n(x^*)}{n!}(x_n - x^*)^{n-1} \end{aligned}$$

1-i) Si n est impair alors on a $n-1$ est pair d'où $(x_n - x^*)^{n-1} > 0$.
Considérons le cas $f^n(x^*) < 0$ et soit x_0 un point initial tel que $\left| \frac{f^n(x^*)}{n!}(x_0 - x^*)^{n-1} \right| < 1$ on a alors :

$$\begin{cases} 0 < 1 + \frac{f^n(x^*)}{n!}(x_0 - x^*)^{n-1} < 1 \Rightarrow \frac{x_1 - x^*}{x_0 - x^*} < 1. \\ \quad .... \\ 1 + \frac{f^n(x^*)}{n!}(x_{n-1} - x^*)^{n-1} < 1 \Rightarrow \frac{x_n - x^*}{x_{n-1} - x^*} < 1. \end{cases}$$

On constate que $(x_n - x^*)$ et $(x_{n-1} - x^*)$ sont de même signe. Par conséquent si x_0 commence à droite de x^* les itérés x_n seront également à droite de x^* et si x_0 commence à gauche de x^* les itérés x_n seront également à gauche de x^*.

a) Supposons à présent que x_0 est à droite de x^*

$$\begin{cases} x_0 - x^* > 0 \text{ et } 0 < \frac{x_1 - x^*}{x_0 - x^*} < 1 \Rightarrow 0 < x_1 - x^* < x_0 - x^* \\ \quad .... \\ x_{n-1} - x^* > 0 \text{ et } 0 < \frac{x_n - x^*}{x_{n-1} - x^*} < 1 \Rightarrow 0 < x_n - x^* < x_{n-1} - x^* \end{cases}$$

On déduit donc que la suite x_n est décroissante et minorée par x^*. Elle est par conséquent convergente et converge vers le point fixe x^*. On démontre ainsi que le point fixe est attractif.

De plus comme la suite est décroissante il suffit de poser $\delta = \epsilon$ dans la définition de la stabilité pour montrer que le point fixe est stable.

b) Supposons à présent que x_0 est à gauche de x^*

$$\begin{cases} x_0 - x^* < 0 \text{ et } 0 < \frac{x_1 - x^*}{x_0 - x^*} < 1 \Rightarrow x_0 - x^* < x_1 - x^* < 0 \\ \quad .... \\ x_{n-1} - x^* < 0 \text{ et } 0 < \frac{x_n - x^*}{x_{n-1} - x^*} < 1 \Rightarrow x_{n-1} - x^* < x_n - x^* < 0 \end{cases}$$

On déduit donc que la suite x_n est croissante et majorée par x^*. Elle est par conséquent convergente et converge vers le point fixe x^*. On démontre ainsi que le point fixe est attractif.

De plus comme la suite est croissante il suffit de poser $\delta = \epsilon$ [2]dans la définition de la stabilité pour montrer que le point fixe est stable.

1-ii) Considérons le cas $f^n(x^*) > 0$

$$1 + \frac{f^n(x^*)}{n!}(x_0 - x^*)^{n-1} = C_0 > 1 \Rightarrow x_1 - x^* = C_0 (x_0 - x^*)$$
$$1 + \frac{f^n(x^*)}{n!}(x_1 - x^*)^{n-1} = C_1 > 1 \Rightarrow x_2 - x^* = C_1 (x_1 - x^*) = C_1 C_0 (x_0 - x^*)$$

Comme $x_1 - x^* > (x_0 - x^*)$ il s'ensuit que $C_1 > C_0$ d'où : $x_2 - x^* > C_0^2 (x_0 - x^*)$

On peut généraliser ensuite par récurrence pour obtenir : $x_n - x^* > C_0^n (x_0 - x^*)$ avec $C_0 > 1$ d'où on conclut que le point fixe est instable.

2-i) Si n est pair alors on a $n - 1$ est impair .

a) Considérant le cas $f^n(x^*) < 0$. Soit x_0 un point initial tel que $\left| \frac{f^n(x^*)}{n!}(x_0 - x^*)^{n-1} \right| < 1$ et $x_0 - x^* > 0$ on a alors :

$$0 < 1 + \frac{f^n(x^*)}{n!}(x_0 - x^*)^{n-1} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{x_1 - x^*}{x_0 - x^*} < 1 \Rightarrow x_1 - x^* < x_0 - x^*$$

De plus comme le rapport $0 < \frac{x_1 - x^*}{x_0 - x^*} < 1$ l'itéré x_1 est également à droite de x^*.

En généralisant par récurrence on obtient pour tout n (Revoir la preuve **1-i)**.

$$0 < \frac{x_n - x^*}{x_{n-1} - x^*} < 1 \Rightarrow x_n - x^* < x_{n-1} - x^* \text{ et } x_n \text{ est à droite de } x^*.$$

[2] Tenir compte du fait que les éléments de la suite sont à gauche de x^*.

On conclut donc que la suite x_n est décroissante et minorée par x^* elle est par conséquent convergente et converge vers l'unique point x^* de l'intervalle.

De plus comme la suite est décroissante il suffit de poser $\delta = \epsilon$ dans la définition de la semi-stabilité pour montrer que le point fixe est semi-stable à droite.

b) Considérant le cas $f^n(x^*) < 0$. Soit x_0 un point initial tel que $\left| \frac{f^n(x^*)}{n!} (x_0 - x^*)^{n-1} \right| < 1$ et $x_0 - x^* < 0$ on a alors :

$$\begin{array}{c} 1 + \frac{f^n(x^*)}{n!} (x_0 - x^*)^{n-1} = C_0 > 1 \Rightarrow x_1 - x^* = C_0 (x_0 - x^*) \\ 1 + \frac{f^n(x^*)}{n!} (x_1 - x^*)^{n-1} = C_1 > 1 \Rightarrow x_2 - x^* = C_1 (x_1 - x^*) = C_1 C_0 (x_0 - x^*) \end{array}$$

Comme $x_1 - x^* > (x_0 - x^*)$ il s'ensuit que $C_1 > C_0$ d'où : $x_2 - x^* > C_0^2 (x_0 - x^*)$

On peut généraliser ensuite par récurrence pour obtenir : $x_n - x^* > C_0^n (x_0 - x^*)$ avec $C_0 > 1$ d'où on conclut que le point fixe est instable.

Le cas **2-ii** se traite de façon similaire. ■

Définition 22 *La dérivée schwarzienne $Sf(x)$ de $f(x)$ est la fonction*

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2 .$$

Proposition 23 *Soit f une fonction 3 fois dérivables et x^* un point fixe de $f(x)$ tel que $f'(x^*) = -1$.*

i) Si $Sf(x^*) < 0$ alors x^* est asymptotiquement stable.

ii) Si $Sf(x^*) > 0$ alors x^* est instable.

Preuve. Soit $g(x) = f^2(x)$ alors $g(x^*) = f^2(x^*) = x^*$. De plus si x^* est asymptotiquement stable par rapport à f alors il est asymptotiquement stable par rapport à g. On a :

$$g'(x) = f'(f(x)) f'(x) \Rightarrow g'(x^*) = f'(f(x^*)) f'(x^*) = f'(x^*) f'(x^*) = (-1)(-1) = 1.$$

On calcule ensuite la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} g''(x) &= f''(f(x))(f'(x))^2 + f'(f(x))f''(x) \\ &\Rightarrow g''(x^*) = f''(x^*)(f'(x^*))^2 + f'(x^*)f''(x^*) = 0. \end{aligned}$$

Comme la dérivée seconde est nulle on calcule la dérivée 3ème :

$$g'''(x) = \left[f'''(f(x))(f'(x))^3 + 2f''(f(x))f'(x)f''(x)\right] + \left[f''(f(x))f'(x)f''(x) + f'(f(x))f'''(x)\right]$$

En remplaçant par x^* on obtient :

$$\begin{aligned} g'''(x^*) &= \left[f'''(x^*)(f'(x^*))^3 + 2f''(x^*)f'(x^*)f''(x^*)\right] + \left[f''(x^*)f'(x^*)f''(x^*) + f'(x^*)f'''(x^*)\right] \\ &\Rightarrow g'''(x^*) = -f'''(x^*) - 2(f''(x^*))^2 - (f''(x^*))^2 - f'''(x^*) \\ &\Rightarrow g'''(x^*) = -2f'''(x^*) - 3(f''(x^*))^2 = 2Sf(x^*) \text{ car } f'(x^*) = -1. \end{aligned}$$

Il suffit ensuite d'appliquer la proposition précédente pour trouver le résultat. ■

1.4.2 Stabilité des cycles

Proposition 24 *Soit* $\{x_i = f^i(x_0) : 0 \leq i \leq k-1\}$ *un cycle d'ordre* k *d'une fonction continument différentiable alors on a :*
(i) : Si $|f'(x_0).f'(x_1)...f'(x_{k-1})| < 1$ *alors le cycle d'ordre* k *est attractif.*
(ii) : Si $|f'(x_0).f'(x_1)...f'(x_{k-1})| > 1$ *alors le cycle d'ordre* k *est instable .*

Preuve. Il suffit d'appliquer le critère de stabilité à la fonction f^k et à x_0 considéré comme son point fixe.

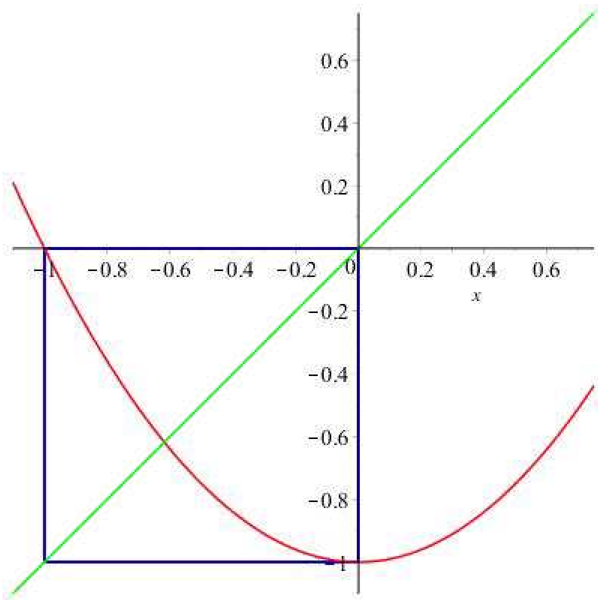
$$\begin{aligned} \left(f^k\right)'(x_0) &= \left(f \circ f^{k-1}\right)'(x_0) = f'\left(f^{k-1}(x_0)\right)\left(f^{k-1}\right)'(x_0) = f'(x_{k-1})\left(f^{k-1}\right)'(x_0) \\ &= ... = f'(x_{k-1})...f'(x_1).f'(x_0). \end{aligned}$$

■

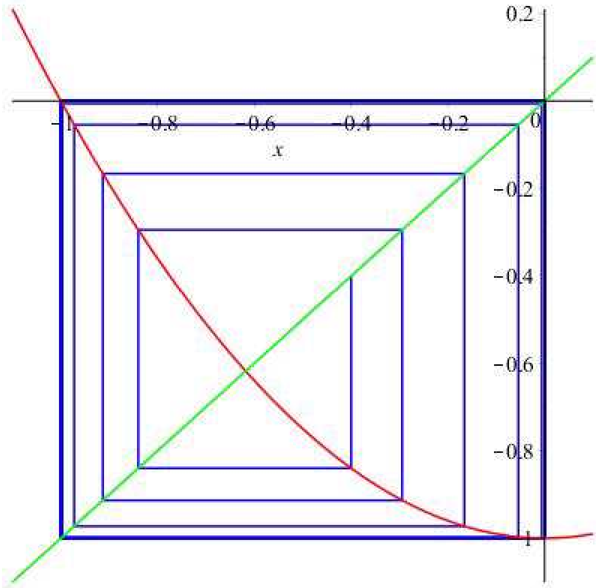
Exemple 25 *On considère la fonction* $f(x) = x^2 - 1$*. On a* $f(0) = -1$ *et* $f(-1) = 0$*. Ainsi* $\{-1, 0\}$ *est un cycle d'ordre 2.*
Pour étudier la stabilité du cycle on a recours

$$f'(-1) . f'(0) = -2.0 = 0$$

Ainsi le cycle $\{-1, 0\}$ *est asymptotiquement stable. Voir les figures ci dessous*



Le cycle $\{-1, 0\}$.



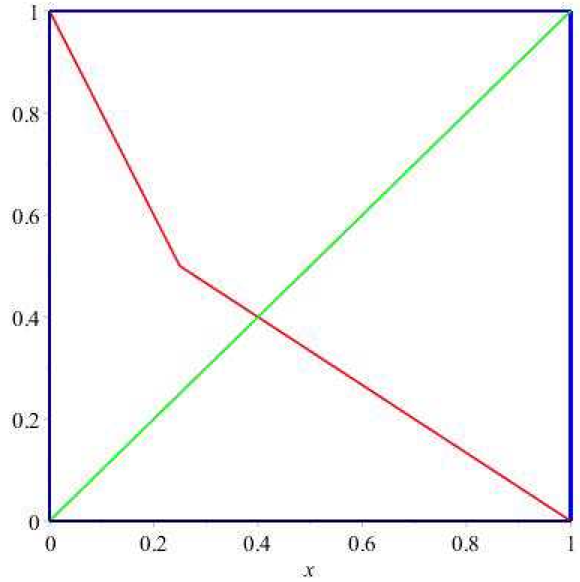
L'orbite de 0.4 converge vers le cycle $\{-1, 0\}$.

Exemple 26 *Soit* $F : [0,1] \to [0,1]$ *définie par*

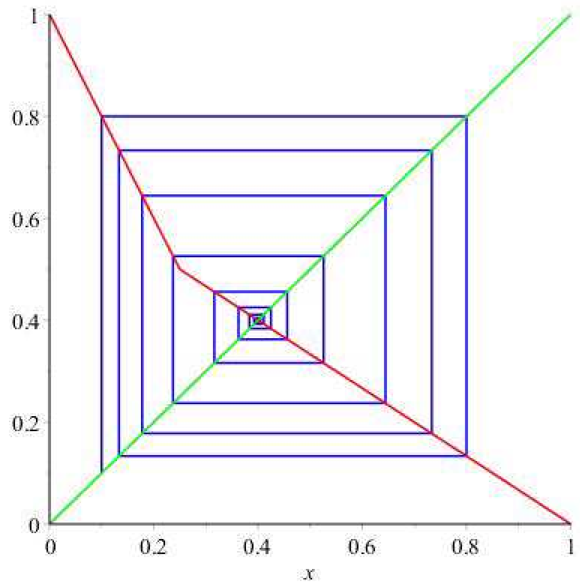
$$F(x) = \begin{cases} -2x+1 : 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ -\frac{2}{3}(x-1) : \frac{1}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

F possède un unique point fixe $r = 0.4$ *et un cycle de période 2 donné par* $\{0, 1\}$.
Le point fixe est asymptotiquement stable car on a $|F'(0.4)| = \frac{2}{3} < 1$.
Le cycle est instable puique on a $|F'(0)| = 2$ *et* $|F'(1)| = \dfrac{2}{3}$ *d'où* $|F'(1)F'(0)| = \dfrac{4}{3} > 1$.
Ainsi une orbite qui commence suffisament proche du cycle $\{0, 1\}$ *finit par s'en éloigner*

voir les deux figures ci dessous.



Le cycle $\{0, 1\}$



L'orbite du point 0.1 finit par converger vers le point fixe 0.4.

1.5 Bassin d'attraction des points fixes (cycles).

Définition 27 *Soit* (X, f) *un système dynamique. Un sous ensemble* $U \subset X$ *est dit invariant par* f *si on a* $f(U) \subset U$.

Définition 28 *Le bassin d'attraction d'un point fixe* x^* *est défini par :*

$$\mathcal{B}(x^*) = \left\{ x : \lim_{n\to\infty} f^n(x) = x^* \right\}$$

Exemple 29 *Soit la fonction* $f(x) = x^2$ *qui admet deux points fixes* 0 *et* 1.
A partir de la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n) = (x_n)^2$ *on obtient :*

$$x_1 = x_0^2 \Rightarrow x_2 = x_1^2 = \left(x_0^2\right)^2 = x_0^4 \Rightarrow x_3 = x_2^2 = \left(x_0^4\right)^2 = x_0^8$$

En généralisant on obtient $x_n = (x_0)^{2^n}$ *qui est une suite extraite de la suite géométrique* $x_n = (x_0)^n$
Ainsi si $-1 < x_0 < 1$ *la suite tend vers* 0, *on déduit donc que le point fixe* 0 *est attractif et que l'intervalle* $]-1, 1[$ *est inclut dans son bassin d'attraction.*
Si $x_0 > 1$ *ou* $x_0 < -1$ *la suite tend vers l'infini car les puissances sont paires.*
Si $x_0 = 1$ *ou* -1 *la suite tend vers* 1, *comme il n'existe aucun voisinage dont tous les points tendent vers 1 on déduit que le point fixe* 1 *est instable.*

1.5.1 Bassin d'attraction des points fixes de récurrences de dimension 1

Remarque 30 *Si* x^* *est un point fixe asymptotiquement stable alors son bassin d'attraction contient un intervalle ouvert non vide contenant* x^*.*Le plus grand intervalle vérifiant cette propriété est appelé le bassin d'attraction immédiat et on note* $B_I(x^*)$.

Théorème 31 *Soit* $f : [a, b] \to [a, b]$ *une fonction continue et soit* x^* *un point fixe de* f

vérifiant

$$\exists \delta > 0, \forall y \in]x^* - \delta, x^* + \delta[\, , \lim_{n\to\infty} f^n(y) = x^*.$$

. Alors a on a :

i) Le bassin d'attraction immédiat $\mathcal{B}_I(x^*)$ *est un intervalle contenant* x^* *qui est soit ouvert soit de la forme* $[a, c[\, ,]c, b]$ *. De plus* $\mathcal{B}_I(x^*)$ *est invariant par* f*.*

ii) Le bassin d'attraction $\mathcal{B}(x^*)$ *est invariant. De plus* $\mathcal{B}(x^*)$ *est l'union (éventuellement infinie) d'intervalles soit ouverts soit de la forme* $[a, c[\, ,]c, b]$ *.*

Preuve. i) On raisonne par l'absurde , supposons que $B_I(x^*) = [c, d[\, , c \neq a$.

On a pour $\epsilon > 0$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^m(c) \in]x^* - \epsilon, x^* + \epsilon[$ (par définition de la limite).

L'intervalle $]x^* - \epsilon, x^* + \epsilon[$ est par conséquent inclus dans $[c, d[$.

Comme f^m est continue il existe $\delta > 0$ tel que si $x_0 \in]c - \delta, c + \delta[$ alors $f^m(x_0) \in]x^* - \epsilon, x^* + \epsilon[$.

Par conséquent $x_0 \in B(x^*)$ et $]c - \delta, d[$ d'où $]c - \delta, d[\cup [c, d[$ est un interval inclu dans le bassin d'attraction et contenant x^*.

D'un autre coté nous avons $[c, d[\subset]c - \delta, d[\cup [c, d[$ ce qui constitue une contradiction avec le fait que $[c, d[$ est le bassin d'attraction immédiat.

Le même raisonnement est utilisé pour prouver l'autre partie de l'assertion.

L'invariance de $B_I(x^*)$ se démontre par l'absurde.

Supposons qu'il existe $y \in B_I(x^*)$ et un entier positif r tel que $f^r(y) \notin B_I(x^*)$.

On a $x^* \in f^r(B_I(x^*))$ et $B_I(x^*) \cap f^r(B_I(x^*)) \neq \emptyset$ d'où $B_I(x^*) \cup f^r(B_I(x^*))$ est un intervalle contenant x^* ce qui contredit la maximalité de $B_I(x^*)$.

ii) Par continuité de f le bassin d'attraction ne peut contenir de points isolés.

Pour montrer l'invariance de $\mathcal{B}(x^*)$ supposons qu'il existe $y \in \mathcal{B}(x^*)$ et un entier positif r tel que $f^r(y) \notin \mathcal{B}(x^*)$.

On a

$$y \in \mathcal{B}(x^*) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f^n(y) = x^* \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f^n(f^r(y)) = x^* \Rightarrow f^r(y) \in \mathcal{B}(x^*)$$

Ce qui constitue une contradiction. ∎

1.6 Attracteurs

La notion d'attracteur est une généralisation de la notion de point fixe attractif ou de point périodique attractif introduite précédemment.

Définition 32 *La distance entre un point x et un ensemble Y est définie par* $d(x,Y) = \inf\{d(x,y) : y \in Y\}$.
On définit en outre $B_\delta(Y) = \{x \in X : d(x,Y) < \delta\}$.

Définition 33 *Soit (X,F) un système dynamique et $Y \subseteq X$ un sous ensemble non vide.*
(1) Y est un attracteur si c'est un fermé non vide et invariant tel que pour chaque $\epsilon > 0$ il existe un δ >0 vérifiant pour tout point $x \in X$

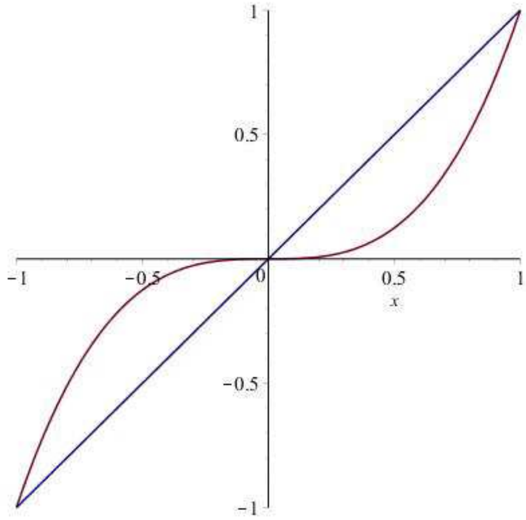
$$\begin{cases} d(x,Y) < \delta \Rightarrow \forall n \geq 0, d(F^n(x), Y) < \epsilon. \\ \lim_{n\to\infty} d(F^n(x), Y) = 0. \end{cases}$$

(2) Y est un attracteur minimal si tout ensemble $Z \subset Y$ n'est pas un attracteur.
(3) Y est un quasi attracteur s'il est l'intersection d'un ensemble dénombrable d'attracteurs mais pas un attracteur.
(4) Le bassin d'attraction d'un attracteur Y est défini par $\mathcal{B}(Y) = \left\{x \in X : \lim_{n\to\infty} d(F^n(x), Y) = 0\right\}$

Exemple 34 *Le système dynamique* $([-1,1], x^3)$ *possède les attracteurs suivants* $\{0\}, [-1,0], [0,1],$ *avec pour bassins d'attraction*

$$\mathcal{B}(\{0\}) =]-1,1[, \mathcal{B}([-1,0]) = [-1,1[, \mathcal{B}([0,1]) =]-1,1], \mathcal{B}([-1,1]) = [-1,1]$$

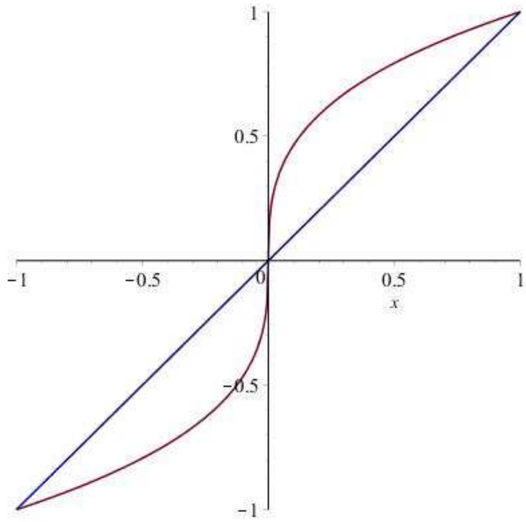
Ainsi l'attracteur minimal est $\{0\}$.



Exemple 35 *Le système dynamique* $([-1,1], \sqrt[3]{x})$ *possède les attracteurs* $\{-1\}, \{1\}$ *et* $[-1,1]$ *avec pour bassins d'attraction*

$$\mathcal{B}(\{-1\}) = [-1,0[\,, \mathcal{B}(\{1\}) = [0,1[\,, \mathcal{B}([-1,1]) = [-1,1].$$

Les attracteurs minimaux sont $\{-1\}$ *et* $\{1\}$.



Remarque 36 *Attention, bien que les ensembles* $[-1, 0]$ *et* $[0, 1]$ *sont invariants ce ne sont pas des attracteurs car instables. En effet un point qui commence à droite de 0 s'éloigne de l'ensemble* $[-1, 0]$ *car va converger vers 1. La remarque est valable dans le cas de*

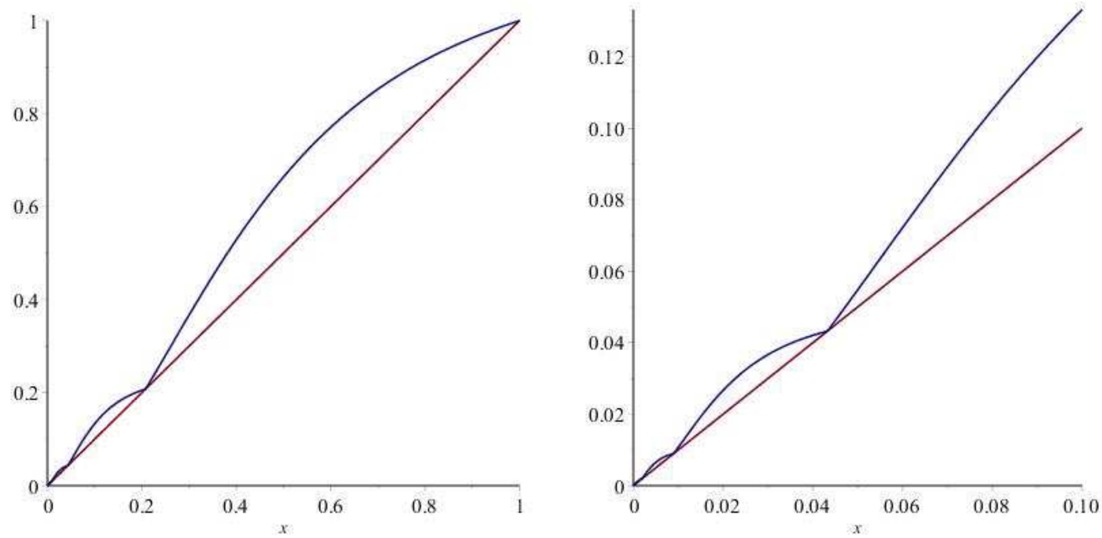
Exemple 37 *Soit le système dynamique* $([0, 1], F)$ *où* F *est définie par* $F(x) = x + \frac{x}{3} |\sin(2\ln(x))|$.
Le système $([0, 1], F)$ *possède une infinité de points fixes données par*

$$p_0 = 1, p_1 = e^{-\frac{\pi}{2}}, ...p_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}, ...p_\infty = 0.$$

La fonction F *est croissante en effet on a*

$$\forall x \in]p_{n+1}, p_n[: F'(x) = 1 \pm \frac{1}{3}(\sin(2\ln x) + 2\cos(2\ln x))$$

De plus pour tout x *la fonction* F *vérifie :* $F(x) \geq x$. *On conclut que* $p_0 = 1$ *est un point fixe attractif. Ainsi l'ensemble* $\{p_0\}$ *est un attracteur minimal.*
Chaque intervalle $[p_n, p_0]$ *est un attracteur et son bassin d'attraction est donné par :*$\mathcal{B}([p_n, p_0]) =]p_{n+1}, p_0]$. *Le plus grand attracteur étant* $[p_\infty, p_0] = [0, 1]$.



Exemple 38 *Soit le système dynamique* $([0,1], G)$ *où* G *est définie par* $G(x) = x - \frac{x}{3}|\sin(2\ln(x))|$.

La fonction G *est croissante et vérifie* $G(x) \leq x$.

Le système possède les mêmes points fixes que le système précédent

$$p_0 = 1, p_1 = e^{-\frac{\pi}{2}}, ...p_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}, ...p_\infty = 0.$$

Chaque intervalle $[0, p_n]$ *est un attracteur et son bassin d'attraction est donné par :*$\mathcal{B}([0, p_n]) = [0, p_{n-1}[$.

Il faut remarquer ici que $\{0\}$ *n'est pas un attracteur car pour tout* $x > 0$ *la suite* $F^k(x)$ *tends vers un point fixe* $p_n \neq 0$ *quand* k *tends vers* ∞.

D'un autre coté on a $\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [0, p_n]$ *ainsi* $\{0\}$ *est un quasi attracteur.*