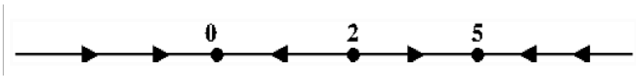
Université de Bejaia **Systèmes dynamiques discrets.**
Département de mathématiques **2016-2017.**

Examen final.

Exercice 1 (04.00 *points*).

1. A partir du portrait de phases si dessous donner la nature des points fixes (stables, asymptotiquement stables ou instables) ainsi que leurs bassins d'attraction respectifs.(01.00 *points*)



2. Donner graphiquement le bassin d'attraction des points fixes de la fonction $f(x) = 4x^3 - 3x$. (Voir graphes en annexe).(01.50 *points*)

3. Montrer les résultats trouvés en (2) analytiquement.(01.50 *points*)

Exercice 2 (04.00 *points*) *Soit le système dynamique* $([0,1], C(x) = 3x \bmod 1)$
.

1. Montrer que ce système ne possède pas de point périodique irrationnel.(02.00 *points*)

2. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que : (02.00 *points*)

$$\forall n \geq n_0 : C^n\left(\left[0, \frac{1}{9}\right]\right) \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right] \neq \varnothing.$$

Exercice 3 (03.00 *points*).

1. Soient (X, f) et (Y, g) deux systèmes dynamiques conjugués. Soit x_0 un point fixe de f.
   Montrer que si x_0 est asymptotiquement stable pour (X, f) alors son image $\pi(x_0)$ est asymptotiquement stable pour (Y, g) .(Où π est la fonction qui vérifie les conditions de la conjugaison topologique) (02.00 *points*)

2. Ce résultat reste il valable si (Y, g) est un facteur de (X, f). Justifier votre réponse.(01.00 *points*)

Exercice 4 (09.00 *points*).
On considère la fonction T *(fonction tente) définie sur l'intervalle* $[0,1]$ *par :*

$$T(x) = \begin{cases} 2x : 0 \leq x < \frac{1}{2}. \\ 2-2x : \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1. Calculer l'expression de $T^2(x)$ et la représenter dans un graphe.(01.50 *points*)

2. Montrer que $T^n(x)$ est définie par morçeaux sur les sous-intervalles $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ où $k = 0..2^n - 1$ par :

$$T^n(x) = \pm 2^n x + \beta_k : \forall x \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \text{ où } \beta_k \text{ est une constante.}$$

3. On admettra que l'image de chaque intervalle de la forme $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ par T^n est égale à $[0,1]$. Déduire que T possède n points périodiques de période inférieure ou égale à n. (00.75 *points*)

4. En utilisant (2) et (3) montrer que l'application tente est transitive.(02.00 *points*)

5. En utilisant (2) et (3) montrer que l'application tente est sensible aux conditions initiales.(02.00 *points*)

6. En utilisant (2) et (3) montrer que l'ensemble des points périodiques est dense(02.00 *points*).

Nom ………………………………………………………………. **Prénom** ……………………………………………………………….