**Université de Bejaia** **Systèmes dynamiques discrets.**
**Département de mathématiques** **2017-2018.**

**Corrigé type Examen final .**

**Exercice 1** (05.00 *points*).

1. Si $f$ est une isométrie alors le système est équicontinue. $(X, f)$ peut être transitif par exemple dans le cas des rotations irrationnelles (01.50 *points*).

2. Soit $([0,1], f)$ un système dynamique. En appliquant le théorème de Sharkovsky si le nombre de points périodiques est fini alors on a la dernière séquence de l'ordre qui correspond uniquement à des périodes de type $2^i$ $i \in \mathbb{N}$. (01.50 *points*).

3. Pour que $f$ soit sensible aux conditions initiales il doit vérifier :

   $$\exists \epsilon > 0, \forall x \in [0,1], \forall \delta > 0, \exists y \in ]x-\delta, x+\delta[, \exists n \text{ tq } |f^n(x) - f^n(y)| > \epsilon.$$

   Posons $\epsilon = \frac{1}{2}$ pour tout $x \in [0,1]$ et $\forall \delta > 0$ il existe $n$ tel que $f^n(]x-\delta, x+\delta[) = [0,1]$ d'où :

   $$\exists a \in ]x-\delta, x+\delta[ : f^n(a) = 0 \text{ et } \exists b \in ]x-\delta, x+\delta[ : f^n(b) = 1$$

   Si $|f^n(x) - f^n(a)| \geq \frac{1}{2}$ alors il suffit de prendre $y = a$ sinon on aura $|f^n(x) - f^n(b)| \geq \frac{1}{2}$ et il suffit de prendre $y = b$ .(02.00 *points*).

**Exercice 2** (07.50 *points*).

1. Les attracteurs $\{0\}, \{1.5\}, [0, 1.5], [1.5, 2], [0, 2]$ $(00.25) \times 5$. Chaque erreur d'attracteur entraine une pénalité de $-00.25$.
   $B(\{0\}) = [0,1[, B(\{1.5\}) = ]1,2[, B([0,1.5]) = [0,2[, B([1.5,2]) = ]1,2],, B([0,2]) = [0,2].(00.25) \times 5$.

2. Chaque point $x \in [0,1] \setminus \{0.5\}$ est périodique de période 2. Le bassin d'attraction de 0.5 est donné par $B(\{0.5\}) = \{0.5, 1.5\}$ .( La note est de 00.50 si la réponse ne contient que $B(\{0.5\}) = \{0.5\}$ ).

3. On a $f'(0) = \frac{-1}{4}$ et $f'(1) = \frac{-13}{4}$ d'où $|f'(0) f'(1)| = \frac{13}{16} < 1$ Le cycle $\{0,1\}$ est par conséquent asymptotiquement stable.(01.00 *points*).

4.

$$x \in \left]\frac{7}{16},\frac{1}{2}\right[ \Rightarrow x|_2 = 0.0111..... \text{ et } x \in \left]0,\frac{1}{16}\right[ \Rightarrow x|_2 = 0.0000..... (00.50\ points)$$

$$x|_2 = 0.01110000.... \in \left]\frac{7}{16},\frac{1}{2}\right[ \text{ et } B^4(x) \in \left]0,\frac{1}{16}\right[. (00.50\ points)$$

Pour trouver $\inf\{x|_2 = 0.01110000....\}$ on pose des 0 partout d'où $\inf\{x|_2 = 0.01110000....\} = \frac{7}{16}$. (00.50 *points*)
Pour trouver $\sup\{x|_2 = 0.01110000....\}$ on pose des 1 partout d'où $\sup\{x|_2 = 0.01110000....\} = 0.01110001|_2$. $0.01110001|_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^8} = \frac{113}{256}$.D'où l'intervalle est $\left]\frac{7}{16},\frac{113}{256}\right[$ (01.00 *points*)

**Exercice 3** (07.50 *points*).

1. $f(]0,0.5[) = ]-1,0[$, , $f(]0.5,0.75[) = ]0,0.5[$ , $f(]-0.5,0.5[) = ]-1,0]$ . (01.50 *points*).

2. On a deux cas : Cas n°1 : $I = [a,b]$ avec $b > a > 0$ on a $f([a,b]) = [2a-1, 2b-1]$. La longueur de $[a,b]$ est donnée par $b-a$ et la longueur de $f([a,b]) = [2a-1,2b-1]$ est donnée par $2(b-a)$.
Cas n°2 : $I = [a,b]$ avec $a < b < 0$ on a $f([a,b]) = [-2b-1,-2a-1]$. La longueur de $[a,b]$ est donnée par $b-a$ et la longueur de $f([a,b]) = [-2b-1,-2a-1]$ est donnée par $2(b-a)$.(02.00 *points*).

3. Sans perte de généralité on suppose $I = [a,b]$ avec $b > a > 0$ à l'application de $f$ la longueur de l'intervalle $[a,b]$ est doublée. on obtient par conséquent $f([a,b]) = [c,d]$ Le nouvel intervalle $[c,d]$ peut contenir 0 d'où on note $[c,d] = [c,0] \cup [0,d]$.
Si la longueur de $[c,0]$ est notée par $-c$ alors la longueur de $[0,d] = 2(b-a)+c$.
A l'itération suivante la longueur de $[c,0]$ sera doublée et devient $-2c$.
De même la longueur de $[0,d]$ sera doublée et devient $4(b-a)+2c$.
La longueur totale est donc $4(b-a)+2c-2c = 4b-4a$.
Ainsi l'application $f$ double la longueur de n'importe quel intervalle. Il existe par conséquent $n$ tel que la longueur totale $2^n(b-a) \geq 2$ et on obtient: $f^n([a,b]) = [-1,1]$.

4. Il suffit de donner la preuve pour les intervalles $\forall I, J \subset [-1,1]$ il existe $n \in N$ tel que $f^n(I) = [-1,1]$ d'où $f^n(I) \cap J = [-1,1] \cap J = J \neq \emptyset$.