**Université de Bejaia** **Systèmes dynamiques discrets.**
**Département de mathématiques** **2017-2018.**

**Examen final.**

**Exercice 1** (05.00 *points*).

1. Soit $(X, f)$ un système dynamique. On suppose que $f$ est une isométrie (i.e pour tout couple $(x, y)$ on a $d(F(x), F(y)) = d(x, y)$). Est ce que $(X, f)$ peut être transitif ? (01.50 *points*).

2. Soit $([0,1], f)$ un système dynamique . On suppose que le nombre des points périodiques de $f$ est fini. Que pouvez vous déduire par rapport à la période des ces points ? (01.50 *points*).

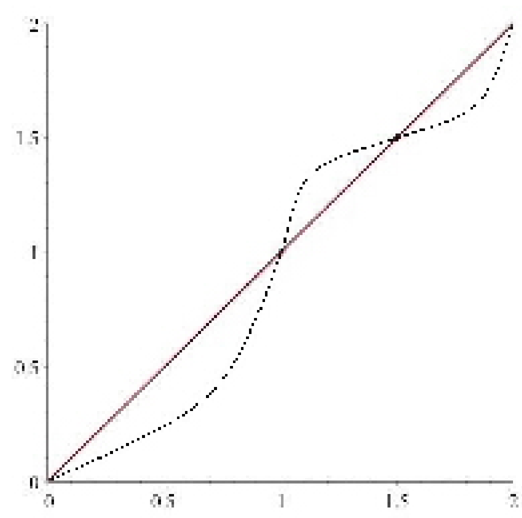
3. Soit $([0,1], f)$ un système dynamique. On suppose que

$$\forall I \subset [0,1] : \exists n \in \mathbb{N} : f^n(I) = [0,1]$$

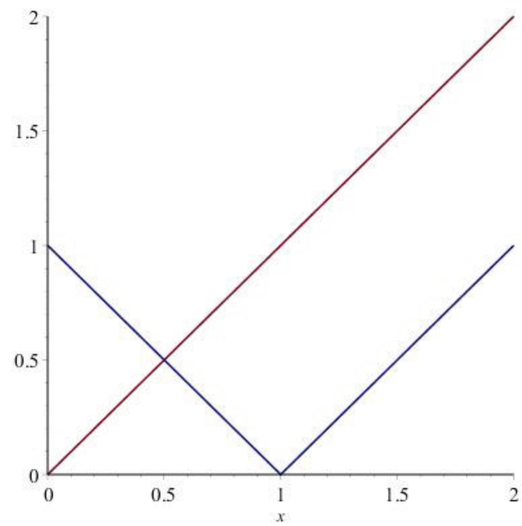
Montrer que $([0,1], f)$ est sensible aux conditions initiales.(02.00 *points*).

**Exercice 2** (07.50 *points*).

1. Trouver les attracteurs et leurs bassin d'attraction respectifs pour le système dynamique $([0,2], f)$ où le graphe de $f$ est donné par : (02.50 *points*).



2. Soit le système dynamique $([0,2], |x-1|)$ .Trouver le bassin d'attraction du point fixe 0.5. Voir le graphe ci dessous : (01.50 *points*).




3. Soit le système $([0,1], f)$ où $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x + 1 : & 0 \leq x < \frac{3}{4}. \\ -\frac{13}{4}(x-1) : & \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$
   Etudier la stabilité du cycle $\{0, 1\}$ . (01.00 *points*).

4. Soit le système dynamique $([0,1[, B(x) = 2x \bmod 1)$.
   Trouver l'intervalle $I$ qui vérifie $I \subset \left]\frac{7}{16}, \frac{1}{2}\right[$ et $B^4(I) \subset \left]0, \frac{1}{16}\right[$ . (02.50 *points*).

**Exercice 3** (07.50 *points*).
*On considère le système* $([-1,1], f(x) = 2|x| - 1)$ .

1. Calculer $f(]0, 0.5[)$ , $f(]0.5, 0.75[)$ , $f(]-0.5, 0.5[)$ . (01.50 *points*).

2. Montrer que pour chaque intervalle $J$ ne contenant pas 0 la fonction $f$ double la longueur de l'intervalle $J$.(02.00 *points*).

3. Montrer que pour tout intervalle $I$ il existe $n$ tel que $f^n(I) = [-1,1]$ . (03.00 *points*).

4. Déduire que le système est transitif. (01.00 *points*).