Université de Bejaia **Systèmes dynamiques discrets.**
Département de mathématiques **2017-2018.**

Examen de rattrapage.

Exercice 1 (07.50 *points*).

1. Soit le système dynamique $\left([0,1], \frac{1}{2}x(1-x)\right)$. Montrer que chaque point $x \in [0,1]$ est un point d'équicontinuité. (01.50 *point*)

2. Soit (I, f) un système dynamique où I est un intervalle fermé et f une fonction dérivable qui vérifie
$$\exists C \in \left]0,1\right[, \forall x \in I, |f'(x)| < C.$$
Montrer que tout point x est un point d'équicontinuité.(02.50 *points*)

3. Soit (X, F) un système dynamique. Soit $Y \subset X$ un attracteur tel que tout point de Y est un point d'équicontinuité.
Montrer que tout point du bassin d'attraction de Y est également un point d'équicontinuité.(03.50 *points*)

Exercice 2 (12.50 *points*) *On considère la fonction* $f(x) = 3x - 4x^3$ *dont le graphe est donné en page 2.*

1. Donner les points fixes du système et déterminer leurs nature. (1.5 *points*)

2. Calculer $f^{-1}([0,1]), f^{-1}([-0.5,0])$. (1.5 *points*)

3. A partir du graphe de la fonction déterminer le comportement des orbites des points x_0 dans le cas $x_0 > 1$ et le cas $x_0 < -1$. (01.50 *points*)
Démontrer votre constat. (02 *points*)

Dans la suite on considère le système dynamique $([-1,1], 3x - 4x^3)$.

1. Montrer qu'il existe $3^n + 1$ points $z_0^n < ... < z_{3^n}^n$ dans $[-1,1]$ tels que :
$$f^n(z_i^n) = \begin{cases} -1 \text{ si } i \text{ est pair.} \\ 1 \text{ si } i \text{ est impair.} \end{cases} \qquad (03 \textit{ points})$$

2. (i) En déduire que pour tout $n \geq 1$, le système dynamique $([-1,1], 3x - 4x^3)$ possède au moins 3^n points périodiques de période n. (1 *point*).
(ii) Montrer que pour tout $n \geq 1$, le système dynamique possède au plus 3^n points périodiques de période n.(Utiliser le fait que f est un polynôme).(02.00 *points*)