1 23-24/01

TRANSFORMATION DE FOURIER
DANS $L^1(\mathbb{R}^n)$

~~DISTRIBUTIONS TEMPÉRÉES~~

TRANSFORMATION DE FOURIER
DISTRIBUTIONS TEMPEREES

① TRANSFORMATION DE FOURIER DANS $L^1(\mathbb{R}^n)$.

① Definition : soit x et $t \in \mathbb{R}^n$ et $(x.t)$ leur produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$.

$$(x.t) = \sum_{k=1}^{n} x_k t_k$$

La transformée de Fourier d'une fonction f de $L^1(\mathbb{R}^n)$ est la fonction $\hat{f}$ definie partout sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2\pi i(x.t)) f(t)\, dt .$$

Remarque : Comme $\exp(-2\pi i(x.t)) = \prod_{k=1}^{n} \exp(-2\pi i(x_k.t_k))$, grâce au theoreme de Fubini, la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R}^n)$ résulte de n transformées de Fourier de fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ dependant de paramètres.

② - Proprietes algebriques :

(i) $$(\bar{f})^\wedge(x) = \overline{\hat{f}(-x)}$$

(ii) * $$(\tau_a f)^\wedge(x) = \exp(-2\pi i(a.x))\, \hat{f}(x)$$

* $$(\exp(2\pi i(a.t)).f)^\wedge = \tau_a \hat{f}$$

(iii) $k \in \mathbb{R}^*$ et $t \in \mathbb{R}^n$

$$(f(kt))^\wedge = |k|^{-n} \hat{f}\left(\frac{x}{k}\right).$$

③ - Proprietes de regularité :

* (i) $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{f}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve : Pour presque tout t dans $\mathbb{R}^n$, la fonction

$x \to \exp(-2\pi i(x.t)) f(t)$ est continue $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\exp(-2\pi i(x\cdot t)) f(t)| \leq |f(t)|$ et $|f| \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

donc $\hat{f}$ est continue.

$$|\hat{f}(x)| = \left|\int \exp(-2\pi i(x\cdot t)) f(t)\,dt\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|\,dt$$

$$|\hat{f}(x)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

* (ii) Supposons que f soit dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et qu'il existe un entier $m \geq 1$ tel que, pour tout multi-indice α / $|\alpha| \leq m$ les fonctions $t \to t^\alpha f(t)$ soient dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors la transformée de Fourier de f est de classe C^m sur $\mathbb{R}^n$ et les dérivées vérifient

$$D^\alpha(\hat{f}) = (-2\pi i)^{|\alpha|} \left(t^\alpha f(t)\right)^\wedge$$

Preuve : $t^\alpha f(t) \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow (t^\alpha f(t))^\wedge$ est continue

$\Rightarrow D^\alpha(\hat{f})$ est continue $\Rightarrow$ $\hat{f}$ est de classe C^m sur $\mathbb{R}^n$.

$$D^\alpha_x\left[\exp(-2\pi i(x\cdot t)) f(t)\right] = (-2\pi i t)^\alpha \exp(-2\pi i(x\cdot t)) f(t).$$

$$\left|D^\alpha_x\left[\exp(-2\pi i(x\cdot t)) f(t)\right]\right| = (2\pi)^{|\alpha|} |t^\alpha f(t)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Un théorème de Lebesgue permet de dériver sous le signe somme

$$D^\alpha(\hat{f})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha\left(\exp(-2\pi i(x\cdot t)) f(t)\right) dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i t)^\alpha \exp(-2\pi i(x\cdot t)) f(t)\,dt = (-2\pi i)^{|\alpha|}\left(t^\alpha f(t)\right)^\wedge(x)$$

De plus $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$|D^\alpha \hat{f}(x)| \leq \|(-2\pi i)^{|\alpha|} t^\alpha f(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{|\alpha|} \cdot \|t^\alpha f(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

$$\|D^\alpha \hat{f}\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{|\alpha|} \|t^\alpha f(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

(iii) Transformée d'une derivée :

Supposons que f soit de classe C^m sur $\mathbb{R}^n$ et que toutes les dérivées $D^\alpha f$ soient dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ $\forall \alpha \,/\, |\alpha| \leq m$.

Alors
$$(D^\alpha f)^\wedge(x) = (2\pi i)^{|\alpha|} x^\alpha \hat{f}(x).$$

Preuve : Supposons que $n = 1$ et que $f \in C^1(\mathbb{R})$ telle que f et f' appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$. On intègre par parties

$$\int_{-A}^{A} f'(t) e^{-2\pi i x t} dt = \left[f(t) e^{-2\pi i x t} \right]_{-A}^{A} + 2\pi i x \int_{-A}^{A} f(t) e^{-2\pi i x t} dt$$

Comme f' est continue, $f(t) - f(t') = \int_{t'}^{t} f'(u) du$.

Comme $f' \in L^1(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$ et $\lim\limits_{t' \to -\infty} f(t')$ existent.

Comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$ et $\lim\limits_{t' \to -\infty} f(t')$ sont nulles.

Donc $\lim\limits_{A \to +\infty} \left(f(t) e^{-2\pi i x t} \right)_{-A}^{A} = 0$

Comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} f(t) e^{-2\pi i x t} dt$ existe.

Donc
$$(f')^\wedge(x) = (2\pi i x) \hat{f}(x).$$

Dans le cas général, on applique le raisonnement à la fonction $t_j \to f(\cdot, \cdot, \dots, t_j, \cdot \cdot)$ où les autres variables sont fixées.

(iv) Corollaire : La transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R}^n)$ tend vers 0 lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$.

Preuve : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, il existe $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc $\|\hat{f} - \hat{g}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

$$|\hat{f}(x)| \leq |\hat{f}(x) - \hat{g}(x)| + |\hat{g}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|\hat{g}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Par ailleurs, le laplacien de g a pour transformée de Fourier

$$(\Delta g)^\wedge(x) = (2\pi i)^2 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)\, \hat{g}(x)$$. On en déduit

$$|\hat{g}(x)| \leq (2\pi)^{-2} \|x\|^{-2} \|(\Delta g)^\wedge(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

c'est à dire que lorsque $\|x\|$ est assez grand,

$$|\hat{g}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où $|\hat{f}(x)| \leq \varepsilon$ lorsque $\|x\| > \alpha$.

(v) Transformation d'une convolution:

Proposition: La transformée de Fourier de la convolée de deux fonctions de $L^1(\mathbb{R}^n)$ est égale au produit multiplicatif habituel des deux transformées :

$$(f * g)^\wedge = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

En appliquant le théorème de Fubini pour intervertir les sommations, on a

$$(f*g)^\wedge(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x.t)} (f*g)(t)\, dt =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x.t)} \int_{\mathbb{R}^n} f(s)\, g(t-s)\, ds\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(s) \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\tau_s g)(t)\, e^{-2\pi i (x.t)} dt \right) ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(s)\, (\tau_s g)^\wedge(x)\, ds = \int_{\mathbb{R}^n} f(s) .\, e^{-2\pi i (x.s)} \hat{g}(x)\, ds$$

$$= \hat{g}(x) . \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x.s)} f(s)\, ds = \hat{g}(x) .\, \hat{f}(x).$$