1re sem Fevrier

Convolution

CONVOLUTION

I) CONVOLUTION DE FONCTIONS

Si f et g sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ et dont l'une au moins est à support compact, on définit leur produit de convolution

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

qui vérifie les propriétés suivantes

(i) $f*g = g*f$

(ii) $\operatorname{supp}(f*g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g = \{x+y \in \mathbb{R}^n \,/\, x \in \operatorname{supp} f \text{ et } y \in \operatorname{supp} g\}$

Preuve : Soit $x \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g = A+B$ fermé

$\exists\, r>0 \,/\, \forall t \in B(x,r),\ t \notin A+B$

ainsi $(t-A) \cap B = \phi$ car sinon

$\exists\, a \in A$ et $\exists\, b \in B \,/\, t-a = b$ ou $t = a+b \in A+B$.

$$(f*g)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t-y)\, g(y)\, dy = \int_{(t-A)\cap B} f(t-y)\, g(y)\, dy = 0.$$

Donc $B(x,r) \subset$ ouvert d'annulation de $f*g$

Donc $x \notin \operatorname{supp}(f*g)$.

(iii) Si deux au moins des trois fonctions f, g, h sont à support compact, alors

$$f*(g*h) = (f*g)*h.$$

II) INEGALITE DE YOUNG.

Il n'est pas necessaire de supposer que f et g continues pour définir leur produit de convolution, ni que l'une des deux fonctions soit à support compact,

Par exemple si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ avec

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \ , \quad 1 \leq p, q < \infty$$

et $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$: inégalité de Young

En particulier (i) $p = q = 1, \ r = 1$

(ii) $1 < p < \infty, \ q = 1, \ r = p$

Preuve :

Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$. Soient λ, μ, ν trois nombres réels tels que $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = 1$. Soient x et $y \in \mathbb{R}^n$.

$$|f(x-y) \cdot g(y)| = |f(x-y)|^{p/\lambda} |g(y)|^{q/\lambda} \cdot |f(x-y)|^{p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda}\right)} |g(y)|^{q\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\lambda}\right)}$$

Soit $h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \cdot g(y) \, dy$

lemme :

$1 \leq p, q, r \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, $u, v, w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |w(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$|h(x)| \leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(|f(x-y)|^{\frac{p}{\lambda}} |g(y)|^{q/\lambda}\right)^{\lambda}\right]^{\frac{1}{\lambda}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} (|f(x-y)|)^{p\mu\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda}\right)}\right]^{\frac{1}{\mu}} \cdot \left[\int_{\mathbb{R}^n} (|g(y)|)^{q\nu\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\lambda}\right)}\right]^{\frac{1}{\nu}}$$

~~on a appliqué le lemme precedent avec~~

Si $\lambda = r$, $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$, $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$.

$$|h(x)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|^q\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^q\right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}}$$

$$|h(x)|^r \le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^q\, dy\right)^{\frac{r}{q}-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |b(y)|^p\right)^{\frac{r}{p}-1} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |b(x-y)|^p |g(y)|^q\, dy\right)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|^r\, dx \le \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^q\, dy\right)^{\frac{r}{q}-1}}_{C_1} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |b(y)|^p\, dy\right)^{\frac{r}{p}-1}}_{C_2} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |b(x-y)|^p |g(y)|^q\, dy\, dx$$

On applique le théorème de fubini.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|^r\, dx \le C_1 \cdot C_2 \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |b(x-y)|^p |g(y)|^q\, dx\right) dy$$

en posant $z = x-y$, $\int_{\mathbb{R}^n} |b(x-y)|^p\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |b(z)|^p\, dz$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|^r\, dx \le C_1 \cdot C_2 \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |b(z)|^p |g(y)|^q\, dz\, dy$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|^r \le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^q\, dy\right)^{\frac{r}{q}-1} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |b(y)|^p\right)^{\frac{r}{p}-1} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |b(z)|^p\, dz\right) \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^q\, dy$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|^r \le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |b(y)|^p\right)^{\frac{r}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^q\, dy\right)^{\frac{r}{q}}$$

c'est à dire

$$\|h\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \le \|b\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

III) DEFINITION :

Etant donné deux fonctions mesurables $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on dit que f et g sont convolables au point x si

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)\, g(y)|\, dy < \infty .$$

Le produit de convolution de deux fonctions est particulièrement intéressant par ses propriétés régularisantes.
Exemple, si f et g sont à support compact, alors

(i) $f*g$ est à support compact.

(ii) Si f est continue, alors $f*g$ l'est aussi

(iii) Si $D^\alpha f$ existe et est continue,
$D^\alpha(f*g)$ existe, est continue et l'on a

$$D^\alpha(f*g) = D^\alpha f * g .$$

IV. PROCEDE DE CONSTRUCTION DE FONCTIONS DE $\mathcal{D}(\Omega)$.

Proposition : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $r > 0$ ~~tel que~~ et $x_0 \in \Omega$ tels que $B(x_0, r) \subset \Omega$.

Soit $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$

$$x \to \psi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{r^2}{r^2 - |x-x_0|^2}\right) & \text{si } |x-x_0| < r \\ 0 & \text{ailleurs dans } \Omega. \end{cases}$$

ψ est de classe C^∞ et $\operatorname{supp}\psi = \overline{B}(x_0, r)$.

$\int_\Omega \psi(x)\,dx$ existe. soit C cette valeur > 0.

soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$

$$x \to \varphi(x) = \frac{\psi(x)}{C}.$$

soit φ_0 la fonction φ pour $r = 1$ et $x_0 = 0$.

Pour $\varepsilon > 0$, $\rho_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon^n}\, \varphi_0\!\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$.

PROPOSITION : Soit f une fonction localement intégrable dans Ω à support compact dans Ω.

Alors pour ε assez petit, la fonction

$$\varphi_\varepsilon = \rho_\varepsilon * f \in \mathcal{D}(\Omega)$$

- $\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon \subset \operatorname{supp} \rho_\varepsilon + \operatorname{supp} f$ compact de Ω pour ε assez petit.
- $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $\quad D^\alpha \varphi_\varepsilon = D^\alpha \rho_\varepsilon * f$.