UNIVERSITE DE BEJAIA

DPT MATHEMATIQUES / M.I. SERIE D'EXERCICES 1

L3 - 2019-2020 - Transformations intégrales dans les L^p

Exercice 1 : On se place dans $\mathbb{R}$. Préciser pour quelles valeurs de a la fonction réelle $f_a : x \to e^{-a|x|}$ admet une transformée de Fourier que l'on calculera.

Exercice 2 : Soit f la fonction numerique d'une variable réelle définie par $f(t) = (1-t^2)\chi_{[-1,1]}(t)$.
Montrer que $\hat{f}(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis le calculer.

Exercice 3 : Vérifier que les fonctions suivantes sont dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ puis calculer leur transformée de Fourier.

ⓐ $u(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Une méthode est de ramener le calcul de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - i2\pi x\xi} dx$ à celui de l'intégrale de e^{-az^2} sur un contour convenable de $\mathbb{C}$. On rappelle que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

ⓑ $u(x) = e^{-a\|x\|^2}$, $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$

ⓒ $u(x) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2\right)$, $\lambda_k > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$

Exercice 4 : Soit l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$
$$\frac{du}{dx} + \lambda x \cdot u = 0 \quad \text{où } \lambda \text{ est un nombre} > 0.$$

① Calculer u pour $u(0) = 1$

② Transformer l'équation différentielle pour obtenir l'équation que vérifie la transformée de Fourier $\hat{u}$ de u.

③ Calculer $\hat{u}$.

Exercice 5 : Soit $a>0$, $f(t) = \cos t$ et $g(t) = \sin t$.

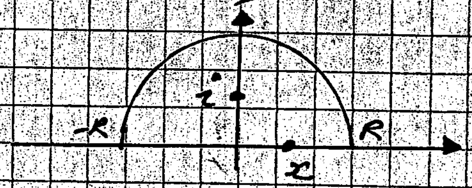
Justifier l'existence de $(\chi_{[-a,a]} * f)(x)$ et $(\chi_{[-a,a]} * g)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis les calculer.

Exercice 6 : Soient les 2 fonctions f_a et g où a est un réel positif définies par

$$f_a(t) = \frac{t}{a^2+t^2} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

Montrer que $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$

En déduire que $f_a * g$ existe et la calculer en utilisant le théorème des résidus sur le contour



Exercice 7 : Soit $f(x) = \dfrac{1}{i+x}$

ⓐ Remarquer que $f \in L^2(\mathbb{R})$ et que $f \notin L^1(\mathbb{R})$

ⓑ Calculer $\hat{f}$ (intégrer $\dfrac{e^{-2i\pi\xi z}}{i+z}$ sur le bord d'un demi-disque dans le demi-plan supérieur ou inférieur selon $\xi < 0$ ou $\xi > 0$.

ⓒ Vérifier l'égalité de Plancherel.