Université A. Mira – Béjaia
Département de Mathématiques /M.I
$L2$ STID

2019/2020

Analyse 4 - TD N 2

Exercice 1. *soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

2) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

3) La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$.

Exercice 2. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.*
On considère la fonction

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto f(xy, x^2+y^2) \end{aligned}$$

1) Déterminer la matrice jacobienne de h.

2) Déduire les dérivées partielles de h en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 3. *Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = (xy, yz+x, x+y+z)$ et g la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y,z) = (x-y, z-x^2)$.*

1) Donner les matrices jacobiennes de f et g en un point (x,y,z).

2) Peut-on composer ces deux fonctions? Si oui expliciter la fonction obtenue.

3) Donner par deux méthodes diférentes la matrice jacobienne de cette composée.

Exercice 4. *On définit la fonction f: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

1) Montrer que f est dérivable en $(0,0)$ dans toutes les directions.

2) La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 5. *Trouver les points critiques de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et donner leurs natures dans chacun des cas:*

1) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$

2) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$

3) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Exercice 6. *Soit*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 1$$

1) Déterminer les points critiques de f .

2) Donner la nature des points critiques.

3) Ecrire la formule de Taylor à l'ordre deux de la fonction f *au voisinage de son point critique.*

Exercice 7. *Soit* $f(x,y) = x^4 + y^4 - \frac{1}{4}(x-y)^2$.

1) Trouver les points critiques de f

2) Ecrire la formule de taylor à l'ordre deux au voisinage de ces points critiques.

3) Déterminer la nature de ces points critiques.