Université A. Mira de Béjaia	**Année universitaire 2017-2018**	جامعة بجاية Tasdawit n'Bgayet Université de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes		
Département de Mathématiques /MI		
Deuxième année Licence Mathématiques	**Examen d' Algèbre 4**	
Durée : 1 heure et 30 mn		Dimanche 03 Juin 2018

Exercice 1 (08 Pts)

Soit φ la forme bilinéaire sur $(\mathbb{R}_2[x])^2$ définie par

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[x],\ \varphi(P,Q) = P(1)Q(-1) + P(-1)Q(1).$$

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique. Donner sa matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. On considère la famille $B^{'} = (1 - X^2, X, X^2)$.
   (a) Montrer que $B^{'}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
   (b) En déduire l'expression, dans cette base, de φ et de la forme quadratique q associée.
   (c) Déterminer l'ensemble J_q des vecteurs isotropes pour q.
3. Soit $F = \left\{P \in \mathbb{R}_2[x] \,/\, P(0) = 0\right\}$.
   (a) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$, déterminer une base de F.
   (b) Déterminer l'orthogonal de F relativement à φ.

Exercice 2 (08 Pts)

On munit $E = \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire

$$< f, g >= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

Pour $i \in \left\{0,1,2,3\right\}$, on pose $P_i(X) = X^i$

1. Montrer que $\left\{P_0, P_1, P_2\right\}$ est libre mais pas orthogonale.
2. Déterminer, par le procédé de Schmidt, une base orthonormée de $F = Vect(P_0, P_1, P_2)$ à partir de P_0, P_1 et P_2.
3. Calculer la projection orthogonale de P_3 sur F, et la distance de P_3 à F.

Exercice 3 (04 Pts)

Soient x, y et z trois réels tels que

$$2x^2 + 3y^2 + 4z^2 \leqslant 12.$$

Montrer que l'on a

$$(x + y + z)^2 \leqslant 13.$$