Université A. Mira de Béjaia

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Deuxième année Licence Mathématiques

Durée : 1 heure et 30 mn

Année universitaire 2018-2019

Examen de Rattrapage d' Algèbre 4

Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Samedi 21 Septembre 2019

Exercice 1 (08 Pts)

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 5z^2 - 2yz - 2zx + 6xy.$$

1. Déterminer la forme bilinéaire symétrique associée à q et sa matrice dans la base canonique.
2. Trouver la décomposition en combinaison linéaire de carrées de formes linéaire indépendantes. Préciser le rang et la signature de q.
3. En déduire une base orthogonale relativement à q. Écrire la matrice D de q dans cette nouvelle base.

Exercice 2 (08 Pts)

Soit $f : \quad \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f((x, y, z), (x', y', z')) = 2xx' + yy' + 2zz' + xy' + yx' + xz' + zx' + yz' + zy'.$$

1. Montrer que f définie un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. Soit F le sous - espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne

$$2x - y + z = 0.$$

   (a) Déterminer l'orthogonal du sous - espace vectoriel F.
   (b) Déterminer un sous - espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont l'orthogonal est F.
   (c) Déterminer l'orthonormalisation de Gram- Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire f.

Exercice 3 (04 Pts)

Soient x, y et z trois réels tels que

$$2x^2 + 3y^2 + 4z^2 \leqslant 12.$$

Montrer que l'on a

$$(x + y + z)^2 \leqslant 13.$$