Université A/ Mira de Béjaia
Faculté des sciences exactes
Département de Mathématiques

Année 2019-2020
$2^{ème}$ année L.M.

Corrigé de la série de T.D. N°3
Résolution numérique des systèmes linéaires

Soluition 3.1. *Soit à résoudre le système d'équations linéaires $Ax = b$ défini par*

$$A = \begin{pmatrix} \beta & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \beta & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \beta & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \beta \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

1. **a)** *Pour $\beta = 3$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. On remarque que la matrice A est à diagonale dominante stricte, donc les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel convergent $\forall\, x^{(0)} \in \mathbb{R}^4$.*

   b) *Pour $\beta = 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On remarque que A est symétrique, de plus elle est définie positive, en effet*

   $$\Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,\ \Delta_4 = det(A) = 5 > 0.$$

   Donc, la méthode de Gauss Seidel converge $\forall\, x^{(0)} \in \mathbb{R}^+$. Mais on ne peut rien dire sur la convergence de la méthode de Jacobi.

2. *Dans le cas où $\beta = 3$, définissons $b =^t (1, 0, 2, 28)$.*

   i) *Calculons la solution exacte du système $Ax = b$, en utilisant la méthode de Gauss.*
   a) Triangularisons la matrice A par la méthode d'elimination de Gauss.
   On pose $A^{(1)} = A$ et $b^{(1)} = b$

   $$(A^{(1)}|b^{(1)}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 28 \end{array}\right) \hookrightarrow (A^{(4)}|b^{(4)}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{8}{3} & -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{21}{8} & -1 & \frac{17}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{55}{21} & \frac{605}{21} \end{array}\right)$$

   Tous les pivots sont non nuls ($a_{11}^{(1)} = 3,\ a_{22}^{(2)} = \frac{8}{3},\ a_{33}^{(3)} = \frac{21}{8},\ a_{44}^{(4)} = \frac{55}{21}$)

   b) La résolution, $Ax = b \Leftrightarrow A^{(4)}x = b^{(4)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ \frac{8}{3}x_2 - 1x_3 = \frac{1}{3} \\ \frac{21}{8}x_3 - x_4 = \frac{17}{8} \\ \frac{55}{21}x_4 = \frac{605}{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 5 \\ x_4 = 11 \end{cases}$

   ii) *Calculons les trois premiers itérés des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel en partant de $x^{(0)} =^t (0, 0, 0, 0)$. $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $a_{ii} \neq 0$, on peut déterminer la matrice de Jacobi et de Gauss-Seidel : On décompose la matrice A en $A = D - E - F$. Soit*

   $$\begin{cases} X^{(k+1)} &= JX^{(k)} + C, \quad X^{(k)} =^t (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, x_4^{(k)}) \\ X^{(0)} &\in \mathbb{R}^4, \end{cases}$$

le processus de Jacobi associé au système $Ax = b$.

La matrice de Jacobi $J = D^{-1}(E+F) = (J_{ij})_{ij}$ *est définie par* $J_{ij} = \begin{cases} \frac{-a_{ij}}{a_{ii}}, & si\ i \neq j, \\ 0, & si\ i = j. \end{cases}$

Donc $J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

Le vecteur itéré $C = D^{-1}b = (c_i)_i$ *est tel que* $c_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$. *Donc* $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{28}{3} \end{pmatrix}$.

Pour $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X^{(1)} = JX^{(0)} + C = C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{28}{3} \end{pmatrix}$,

$X^{(2)} = JX^{(1)} + C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{34}{9} \\ \frac{86}{9} \end{pmatrix}$, $X^{(3)} = JX^{(2)} + C = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{37}{27} \\ \frac{107}{27} \\ \frac{286}{27} \end{pmatrix}$.

Soit

$$\begin{cases} X^{(k+1)} & = & GX^{(k)} + C', \quad X^{(k)} =^t (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, x_4^{(k)}) \\ X^{(0)} & \in & \mathbb{R}^4, \end{cases}$$

le processus de Gauss-Seidel associé au système $Ax = b$.

La matrice de Gauss-Seidel $G = (D-E)^{-1}F$ *où* $(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{81} & \frac{1}{27} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Donc $G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{81} & \frac{1}{27} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$. *Le vecteur itéré* $C' = (D-E)^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{19}{27} \\ \frac{775}{81} \end{pmatrix}$.

Pour $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X^{(1)} = GX^{(0)} + C' = C' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{19}{27} \\ \frac{775}{81} \end{pmatrix}$, $X^{(2)} = GX^{(1)} + C' =$

$\begin{pmatrix} \frac{10}{27} \\ \frac{29}{81} \\ \frac{322}{81} \\ \frac{2590}{243} \end{pmatrix}$, $X^{(3)} = GX^{(2)} + C' = \begin{pmatrix} \frac{110}{243} \\ \frac{1076}{729} \\ \frac{10304}{2187} \\ \frac{71540}{6561} \end{pmatrix}$.

iii) *Comparons ces itérés à la solution exacte* $\overline{X} =^t (1, 2, 5, 11)$. *En utilisant la norme* $\|.\|_\infty$, *on trouve par Jacobi :*

$$\|\overline{X} - X^{(1)}\|_\infty = \frac{13}{4} = 4,333, \ \|\overline{X} - X^{(2)}\|_\infty = \frac{13}{9} = 1,444, \ \|\overline{X} - X^{(3)}\|_\infty = \frac{28}{27} = 1,038.$$

par Gauss-Seidel :

$$\|\overline{X}-X^{(1)}\|_\infty = \frac{116}{27} = 2,296,\ \|\overline{X}-X^{(2)}\|_\infty = \frac{133}{81} = 1,644,\ \|\overline{X}-X^{(3)}\|_\infty = \frac{133}{243} = 0,547.$$

On remarque que les deux méthodes convergent ce qu'on a montré dans la question 1-(a).

iv) *La méthode qui converge le plus vite est celle de Gauss-Seidel, parce que la diminution de l'erreur est plus grande dans cette méthode.*

Soluition 3.2. *On considère le système linéaire $AX = b$, où : $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.*

1. *Résolvons le système donné par la méthode de Gauss. Posons $A^{(1)} = A$ et $b^{(1)} = b$.*

$$(A^{(1)}, b^{(1)}) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 7 \\ 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \hookrightarrow (A^{(2)}, b^{(2)}) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 7 \\ 0 & 15 & 30 \end{array}\right).$$

Résolution : $AX = b \Longleftrightarrow A^{(2)}X = b^{(2)} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 = 1 \end{cases} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$

2. *Etudions la convergence des méthodes itératives de Jacobi et Gauss-Seidel : La matrice A n'est pas à diagonale dominante stricte, de plus est n'est pas définie positive, donc on ne peut rien dire sur la convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Geidel. On doit donc calculer les matrices d'itération. Posons $A = D - E - F$ où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Les matrices J et G existent car $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2$.*

   - $J = D^{-1}(E + F) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, *On obtient*

   $$\rho(J) = \max\{|\lambda| / \det(J - \lambda I_2) = 0\} = 4 > 1,$$

   donc la méthode de Jacobi ne converge pas $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^2$.

   - $G = (D - E)^{-1}F = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$. *On obtient*

   $$\rho(G) = \max\{|\lambda| / \det(G - \lambda I_2) = 0\} = 16 > 1,$$

   donc la méthode de Jacobi ne converge pas $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^2$.

3. *On considère la méthode itérative définie par :*

$$P(X^{(k+1)} - X^{(k)}) = \alpha(b - AX^{(k)}), \qquad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et } P = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) *La méthode itérative s'écrit :*

   $$PX^{(k+1)} = (P - \alpha A)X^{(k)}) + \alpha b,$$

   d'où

   $$X^{(k+1)} = (I_2 - \alpha P^{-1}A)X^{(k)}) + \alpha P^{-1}b.$$

   La matrice d'itération est donc

   $$B_\alpha = (I_2 - \alpha P^{-1}A) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \frac{\alpha}{4} \\ \frac{\alpha}{4} & 1 - \alpha \end{pmatrix}.$$

b) *Calculons les valeurs propres de la matrice d'itération* B_α

$$det(B_\alpha - \lambda I_2) = 0 \Longleftrightarrow (1-\alpha-\lambda^2) - \frac{\alpha^2}{16} = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 - \frac{5}{4}\alpha \vee \lambda = 1 - \frac{3}{4}\alpha.$$

La méthode est convergente si et ssi $\rho(B_\alpha) < 1$. *On a*

$$\rho(B_\alpha) < 1 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |1-\frac{5}{4}\alpha| < 1 \\ |1-\frac{3}{4}\alpha| < 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < \alpha < \frac{8}{5} \\ 0 < \alpha < \frac{8}{3} \end{array} \right. \Longleftrightarrow 0 < \alpha < \frac{8}{5}.$$

c) *Soit* $\alpha = 1$ *et* $X^{(0)} = (1,1)^t$. *Le premier itéré est*

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} =) \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

L'erreur absolue commise est $\|X - X^{(1)}\|_\infty = \max(|1-\frac{3}{4}|, |2-2|) = \frac{1}{4}$.

Soluition 3.3. *1. On considère le système d'équations linéaires* $AX = b$ *où*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2(1-\alpha^2) & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}, \quad et\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Pour que la méthode de Cholesky soit applicable il faut et il suffit que la matrice A soit symétrique et définie positive. Ce qui est vrai si $\alpha \in \left\{-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right\}$.

(b) Pour que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel soient convergentes il suffit que la matrice A soit à diagonale dominante stricte (DDS). Cela est vrai si $2|1-\alpha^2| < 1$. *Ensuite, la résolution de cette inéquation donne* $\alpha \in \left]-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right[$.

2. On considère la suite itérative $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} X^{(0)} \in \mathbb{R}^3 \ \ donné \\ X^{(k+1)} = BX^{(k)} + C, \ k \geq 0, \end{array} \right.$$

Que peut-on dire sur la convergence de la suite $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *dans les trois cas suivants :*

Cas 1 : $\lim\limits_{n\to+\infty} B^n \neq 0$ *au sens matriciel.*

Cas 2 : *Le polynôme caractéristique P de la matrice B vérifie :* $P(-3) > 0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$.

Cas 3 : *Le polynôme caractéristique P de la matrice B admet une unique racine réelle* $\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Réponse :

Cas 1 : *On sait que* $\lim\limits_{n\to+\infty} B^n = 0$ *est une condition nécessaire pour la convergence de la suite* $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. *Donc dans ce cas cette suite ne peut être convergente* $\forall\, X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

Cas 2 : $P(-3) > 0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ *impliquent que P admet une racine réelle* $l \in]-\infty, -3[$. *C'est à dire que le rayon spectral* $\rho(B) > 1$. *Donc la suite* $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *ne peut pas être convergente* $\forall\, X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

Cas 3 : *Dans ce cas on ne peut rien dire sur le rayon spectral* $\rho(B)$, *car on a aucune information sur les deux autres racines complexes de P. Donc on ne peut rien dire sur la convergence de notre suite.*

Soluition 3.4. *On considère le système d'équations linéaires $AX = b$ défini par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2(1-\alpha) & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{et } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

1. **i)** *La méthode d'élimination de Gauss est applicable ssi $det(A) \neq 0$.*
   On a $det(A) = 2\alpha$, alors $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}^*$.

   ii) *La méthode de la décomposition LU est applicable ssi $det(A_{[i]}) \neq 0, \ i = 1, 2, 3$.*
   On a $det(A_{[1]}) = 1$ et $det(A_{[2]}) = det(A_{[3]}) = 2\alpha$, alors

   $$det(A_{[i]}) \neq 0, \ i = 1, 2, 3. \Longleftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

   iii) *La méthode de Cholesky est applicable ssi $A^t = A$ et $det(A_{[i]}) > 0, \ i = 1, 2, 3$.*
   Pour satisfaire ces deux conditions il faut prondre $\alpha = \frac{1}{2}$.

2. *Pour que les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel soient convergentes, il suffit que la matrice A soit à diagonal dominante stricte. On a*

   $$A \text{ est à diagonal dominante stricte} \Longrightarrow 2|1-\alpha| < 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}.$$

3. *Posons $A = D - E - F$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et*

   $F = \begin{pmatrix} 0 & 2(\alpha-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a

   $$J = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 0 & 2(\alpha-1) & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 0 & 2(\alpha-1) & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. **a)** *Pour que les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel soient convergentes il faut et il suffit que leurs rayons spectraux soint strictement inférieurs à 1.*
   On a

   $$\rho(J) = \max\{|\lambda| \mid \det(J - \lambda I_3) = 0\} = \max\{0, \sqrt{|1-\alpha|}\} = \sqrt{|1-\alpha|}\cdot$$
   $$\rho(G) = \max\{|\lambda| \mid \det(G - \lambda I_3) = 0\} = \max\{0, |1-\alpha|\} = |1-\alpha|\cdot$$

   Donc $\rho(J) < 1 \Longleftrightarrow 0 < \alpha < 2$ et $\rho(G) < 1 \Longleftrightarrow 0 < \alpha < 2$.

   b) *Supposons que les méthodes de Jacobi et Gauu-Seidel sont convergentes. Alors, d'une part, on a $\rho(J), \rho(G) < 1$ et d'autre part, on a $\rho(G) = |1-\alpha| = (\sqrt{|1-\alpha|})^2 = (\rho(J))^2$. Donc $\rho(G) \leq \rho(J)$. D'où la méthode qui converge le plus rapidement est celle de Gauss-Seidel.*

Soluition 3.5. *On considère la matrice tridiagonale A définie par : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.*

Posons $A = D - E - F$ où $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Les matrices J et G existent car $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, 3$.

1. *On considère le processus itératif de Jacobi :* $\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^3, \\ X^{(n+1)} = JX^{(n)} + C, \ n \geq 0. \end{cases}$

   a) *On a*

$$J = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = D^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}b_1 \\ \frac{1}{2}b_2 \\ \frac{1}{3}b_3 \end{pmatrix}$$

   b) $\rho(J) = \max\{|\lambda| / \det(J - \lambda I_3) = 0\} = \max\{0, \frac{1}{\sqrt{2}}\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot$

2. *On considère le processus itératif de Gauss-Seidel :*

$$\begin{cases} Y^{(0)} \in \mathbb{R}^3, \\ Y^{(n+1)} = GY^{(n)} + C', \ n \geq 0. \end{cases}$$

   a) *La matrice G existe car $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, 3$ et on a $G = (D-E)^{-1}F$ et $C' = (D-E)^{-1}b$, où $(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Donc*

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et } \ C = (D-E)^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}b_1 \\ -\frac{1}{6}b_1 + \frac{1}{2}b_2 \\ \frac{1}{9}b_1 - \frac{1}{3}b_2 + \frac{1}{3}b_3 \end{pmatrix}$$

   b) $\rho(G) = \max\{|\lambda| / \det(G - \lambda I_3) = 0\} = \max\{0, \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}\cdot$ *En on déduit que* $\rho(G) = \frac{1}{2} = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = (\rho(J))^2$.

   c) *On suppose que cette relation reste valable pour toute matrice tridiagonale $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. On peut dire que pour ce type de matrices, dans le cas de convergence, le processus de Gauss-Seidel converge plus rapidement que celui de Jacobi.*

   d) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $e^{(n)} = Y^{(n)} - Z$, où Z est l'unique solution de système $AX = b$. On a $Z = GZ + C'$ et $Y^{(n+1)} = GY^{(n)} + C'$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $e^{(n+1)} = Ge^{(n)}$ si on écrit composante à composante on obtient*

$$\begin{cases} e_1^{(n+1)} &= -\frac{1}{3}e_2^{(n)} \\ e_2^{(n+1)} &= -\frac{1}{6}e_2^{(n)} - \frac{1}{2}e_3^{(n)} \\ e_3^{(n+1)} &= -\frac{1}{9}e_2^{(n)} + \frac{1}{3}e_3^{(n)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |e_1^{(n+1)}| \leq \frac{1}{3}\|e^{(n)}\|_\infty \\ |e_2^{(n+1)}| \leq (\frac{1}{6} + \frac{1}{2})\|e^{(n)}\|_\infty \\ |e_3^{(n+1)}| \leq (\frac{1}{9} + \frac{1}{3})\|e^{(n)}\|_\infty \end{cases}$$

   et donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \ \|e^{(n+1)}\|_\infty \leq \frac{2}{3}\|e^{(n)}\|_\infty.$$

   D'après l'inégalité précédente on aura

$$\|e^{(n)}\|_\infty \leq (\frac{2}{3})^n \|e^{(0)}\|_\infty \longrightarrow 0, \ \textit{quand } n \to +\infty.$$

   D'où la convergence de la suite itérative $(Y^{(n)})_n$ vers Z, $\forall\, Y^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

Soluition 3.6. *On considère le système linéaire $AX = b$ défini par*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et } \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \ \text{où } b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}.$$

1. *Remarquons que la matrice A n'est pas à diagonale dominante stricte, et même si on réordonne les équations du système $AX = b$ cette condition n'aura pas lieu. Mais elle est symétrique définie positive (car $A^t = A$ et*
$\det(A_{[1]}) = 3 > 0, \det(A_{[2]}) = \frac{80}{9} > 0, \det(A) = 52 > 0$*). Donc on peut assure la convergence de la méthode de Gauss-Seidel pour tout choix du vecteur de départ, mais on ne peut rien dire sur la convergence de la méthode de Jacobi.*
2. *On considère la suite itérative $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^3 \ \text{ donné} \\ X^{(k+1)} = JX^{(k)} + C, k \geq 0, \end{cases}$$

où J est la matrice d'itération de la méthode de Jacobi.

a) *J et C existent car tous les éléments diagonaux de la matice A ne sont pas nuls. On trouve*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad b = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{3} \\ \frac{b_2}{3} \\ \frac{b_3}{9} \end{pmatrix}.$$

b) *On trouve $P(\lambda) = \det(J - \lambda I_3) = -\lambda^3 + \frac{31}{81}\lambda - \frac{2}{81}$.*

c) i) *D'après le graphe (a), les trois racines du polynôme caractéristique P de la matrice J sont toutes réelles et elles se trouvent dans l'intervalle $]-1, 1[$. Alors*

$$\rho(J) = \max\{|\lambda| : \det(J - \lambda I_3)\} < 1.$$

La suite $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est donc convergente pour tout $X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

ii) *Oui, on peut appliquer la méthode de dichotomie pour approcher les trois racines de P car, les trois racines du polynôme P sont réelles et pour chacune de ces trois racines on peut déterminer un sous intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ qui contient uniquement cette racine sur lequel la condition de signe soit satisfaite ($P(a) \times P(b) < 0$).*

iii) *On a $P \in C^\infty(\mathbb{R})$, donc $P \in C^2(]-\infty, 0])$ et d'après le graphe (a) pour $I = [-1, -\frac{1}{2}]$, on a $P(-1) \times P(-\frac{1}{2}) < 0$, le polynôme P est strictement décroissant sur I ($P'(x) < 0, \forall x \in I$) et $P''(x) > 0, \forall x \in I$. Donc la méthode de Newton-Raphson est applicable sur l'intervalle $I = [-1, -\frac{1}{2}]$ pour tout $x_0 \in J = [-1, -\frac{7}{10}]$ (car sur l'intervalle J on a $P(x) > 0$, ce qui implique que la condition $P(x_0) \times P''(x_0) > 0$ et satisfaite si $x_0 \in J$).*

vi) *Soit $x_0 = -1$. En utilisant la méthode de Newton-Raphson, calculer une approximation α^* de α à 5×10^{-2} près, en donnant des résultats arrondis à 4 chiffres significatifs.*
On sait que la suite $(\lambda_n)_n$ de la méthode de Newton Raphson appliquée à P est définie par :

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{P(\lambda_n)}{P'(\lambda_n)} = \lambda_n - \frac{-3\lambda_n^3 + \frac{31}{81}\lambda_n - \frac{2}{81}}{-3\lambda_n^3 + \frac{31}{81}} = \frac{-2\lambda_n^3 + \frac{2}{81}}{-3\lambda_n^2 + \frac{31}{81}}, \ n \geq 0.$$

Alors pour $\lambda_0 = -1$, on obtient
$\lambda_1 = -0.7736$ *avec* $|\lambda_1 - \lambda_0| = 0.2264 > 0,05$;
$\lambda_2 = -0.6729$ *avec* $|\lambda_2 - \lambda_1| = 0.1007 > 0,05$;
$\lambda_3 = -0.6499$ *avec* $|\lambda_3 - \lambda_2| = 0.023 < 0,05$.
Donc $\alpha \approx \alpha^* = \lambda_3 = -0.6499$.