Université A/ Mira de Béjaia
Faculté des sciences exactes
Département de Mathématiques

Année 2019-2020
$2^{ème}$ année L.M.

Série de T.D. N°3

Résolution numérique des systèmes linéaires

Exercice 3.1. *Soit à résoudre le système d'équations linéaires $Ax = b$ défini par :*

$$A = \begin{pmatrix} \beta & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \beta & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \beta & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \beta \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

1. *Que peut-on dire de la convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel si*
   (a) $\beta = 3$;
   (b) $\beta = 2$.
2. *Dans le sense où $\beta = 3$, définissons $b =^t (1, 0, 2, 28)$.*
   i) *Calculer la solution exacte du système $Ax = b$, en utilisant la méthode de Gauss.*
   ii) *Calculer les trois premiers itérés des méthode de Jacobi et Gauss-Seidel en partant de $x^{(0)} =^t (0, 0, 0, 0)$.*
   iii) *Comparer ces itérés à la solution exacte. les résultats sont-ils cohérents avec ceux du question 1-(a).*
   iv) *S'il y a convergence des deux méthode, déterminer celle qui converge le plus vite. pourquoi ?*

Exercice 3.2. *On considère le système linéaire $AX = b$, où :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et } b = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Résoudre ce système par la méthode d'élimination de Gauss.*
2. *Etudier la convergence des méthodes itératives de Jacobi et Gauss-Seidel appliquées au système $AX = b$.*
3. *On considère la méthode itérative définie par :*

$$P(X^{(k+1)} - X^{(k)}) = \alpha(b - AX^{(k)}), \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et } P = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) *Réécrire cette méthode sous la forme itérative générale :*

$$X^{(k+1)} = B_\alpha X^{(k)} + \alpha P^{-1} b, \quad k \geq 0$$

   et calculer explicitement la matrice d'itération B_α.
   b) *Donner les valeurs du paramètre α pour lesquelles cette méthode est convergente $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^2$.*
   c) *Soit $\alpha = 1$. Calculer le premier itéré $X^{(1)}$ en choisissant $X^{(0)} = (1, 1)^t$. Estimer l'erreur absolue commise en norme $\|.\|_\infty$.*

Exercice 3.3. *1. On considère le système d'équations linéaires $AX = b$ où*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2(1-\alpha^2) & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \textit{et } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Donner les valeurs du paramètre réel α pour lesquelles la méthode de Cholesky soit applicable.

(b) Donner une condition suffisante sur le choix du paramètre α pour que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel soient convergentes.

2. On considère la suite itérative $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^3 \ \ \textit{donné} \\ X^{(k+1)} = BX^{(k)} + C, \ k \geq 0, \end{cases}$$

Que peut-on dire sur la convergence de la suite $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ dans les trois cas suivants :

Cas 1 : $\lim\limits_{n\to+\infty} B^n \neq 0$ *au sens matriciel.*

Cas 2 : *Le polynôme caractéristique P de la matrice B vérifie : $P(-3) > 0$ et* $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$.

Cas 3 : *Le polynôme caractéristique P de la matrice B admet une unique racine réelle* $\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Exercice 3.4. *On considère le système d'équations linéaires $AX = b$ défini par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2(1-\alpha) & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \textit{où } \alpha \in \mathbb{R}, \quad \textit{et } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

1. *Etablir pour quelles valeurs du paramètre réel α les méthodes directes suivantes sont applicables :*

   i) *la méthode d'élimination de Gauss,*

   ii) *la méthode de la décomposition LU,*

   iii) *la méthode de Cholesky.*

2. *Sans calculer les matrices d'itération, donner une condition suffisante sur le paramètre α pour que les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel soient convergentes.*
3. *Calculer les matrices d'itération J et G pour les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel, respectivement.*
4. **a)** *Etablir pour quelles valeurs de α les sur le paramètre α pour que les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel sont convergentesde.*

   b) *Quelle est la méthode qui converge le plus rapidement ?*

Exercice 3.5. *On considère la matrice tridiagonale A définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $b = (b_1, b_2, b_3)^t \in \mathbb{R}^3$.

1. *On considère le processus itératif de Jacobi associé au système $AX = b$:*

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^3, \\ X^{(n+1)} = JX^{(n)} + C, \ n \geq 0, \end{cases}$$

   (a) *Déterminer J et C.*

   (b) *Calculer $\rho(J)$ le rayon spectral de J.*

2. *On considère le processus itératif de Gauss-Seidel associé au système $AX = b$:*

$$\begin{cases} Y^{(0)} \in \mathbb{R}^3, \\ Y^{(n+1)} = GY^{(n)} + C', \ n \geq 0, \end{cases}$$

   (a) *Déterminer G et C'.*

   (b) *Calculer $\rho(G)$ le rayon spectral de G.*

   (c) *En déduire que $\rho(G) = (\rho(J))^2$. Que peut-on dire de la convergence des processus de Jacobi et Gauss-Seidel associés au système $AX = b$?*

   (d) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $e^{(n)} = X^{(n)} - X^*$, où X^* est la solution exacte du système $AX = b$. Montrer qu'il existe $K \in [0, 1]$ tel que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \ \|e^{(n+1)}\|_\infty \leq K\|e^{(n)}\|_\infty.$$

   En déduire la convergence de la suite itérative $(X^{(n)})_n$.

Exercice 3.6. *On considère le système linéaire $AX = b$ défini par*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{et } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ où } b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}.$$

1. *Peut-on assurer la convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel, pour tout choix du vecteur de départ, avant de calculer les matrices d'itération associées à ces méthodes ?*

2. *On considère la suite itérative $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^3 \ \text{donné} \\ X^{(k+1)} = JX^{(k)} + C, k \geq 0, \end{cases}$$

   où J est la matrice d'itération de la méthode de Jacobi.

   a) *Calculer J et C, en justifiant leurs existence.*

   b) *Calculer $P(\lambda) = \det(J - \lambda I_3)$.*

   c) *Représenter le polynôme P graphiquement.*

   i) *Que peut-on dire de la convergence de la suite $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$?*

   ii) *Peut-on appliquer la méthode de dichotomie pour approcher toutes les racines de P? Justifier.*

   iii) *On note par α la racine négative de P. Donner un sous intervalle I de $]-\infty, 0]$ sur lequel la méthode de Newton-Raphson soit applicable pour tout $x_0 \in J$, où J est un sous intervalle de I à déterminer.*

   vi) *Soit $x_0 = -1$. En appliquant la méthode de Newton-Raphson, calculer une approximation α^* de α à 5×10^{-2} près, en donnant des résultats arrondis à 4 chiffres significatifs.*

   v) *Représenter graphiquement la convergence de la suite $(\lambda_n)_n$ associée à la méthode de Newton-Raphson vers α.*

Exercice supplimentaires

Exercice 3.7. *Soit* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ *la matrice définie par :*

$$a_{ij} = \begin{cases} i(4i+5), & si \ \ i = j, \\ 3\min(i,j), & si \ \ i \neq j. \end{cases}$$

1. *Donner la décomposition* $R.R^t$ *de* A *à l'aide de l'algorithme de Cholesky en justifiant son existence.*
2. *En déduire la solution du système* $AX = b$ *où* $b = (1,\ 1,\ 0)^t$.
3. *Comment peut-on résoudre, avec un minimum d'opérations, le système* $A^2X = b$*? Justifier votre réponse.*

Exercice 3.8. *(15 points)*
On considère la matrice A *et le vecteur* b *définis par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. *Résoudre le système* $AX = b$ *par la méthode d'élimination de Gauss.*
2. *Soit la matrice* $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

   a) *Quelle relation y-a-t-il entre les matrice* A *et* B*? Ecrire le processus itératif correspondant.*

   b) *Montrer que* $P(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = -\lambda^3 - 3\lambda + 1$.

   c) *Séparer graphiquement les racines de* P *et vérifier que* P *admet une racine séparée* $\overline{\lambda} \in [\frac{1}{10}, \frac{1}{3}]$*. Conclure.*

   d) *Comment peut-on déterminer l'approximation initiale* $X^{(0)}$ *pour retrouver la solution exacte du système* $AX = b$ *(de la question 1) après une étape ?*

3. **a)** *Déterminer une fonction* ϕ *telle que la suite définie par :* $\lambda_{n+1} = \phi(\lambda_n)$, $n \geq 0$ *converge vers* $\overline{\lambda}$, $\forall\, \lambda_0 \in [\frac{1}{10}, \frac{1}{3}]$.

   b) *Pour* $\lambda_0 = \frac{1}{3}$*, calculer* λ_1 *et* λ_2 *avec 5 chiffres significatifs, puis estimer l'erreur* $|\lambda_2 - \overline{\lambda}|$.

4. **a)** *Montrer que l'algorithme de Newton associé à l'équation* $P(\lambda) = 0$ *s'écrit :*

$$\lambda_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{2\lambda_n^3 + 1}{\lambda_n^2 + 1}\right), n \geq 0.$$

   b) *Montrer que l'algorithme de Newton converge vers* $\overline{\lambda}$, $\forall\, \lambda_0 \in [\frac{1}{10}, \frac{1}{3}]$ *vérifiant une certaine condition à préciser.*

   c) *En utilisant le théorème des accroissement finis à la fonction* P *sur l'intervalle* $[\overline{\lambda}, \lambda_{n+1}]$ *ou (* $[\lambda_{n+1}, \overline{\lambda}]$*) et le développement de Taylor de la fonction* P *à l'ordre 2 en* λ_n *suivant :*

$$f(\lambda_{n+1}) = f(\lambda_n) + (\lambda_{n+1} - \lambda_n)f'(\lambda_n) + \frac{(\lambda_{n+1} - \lambda_n)^2}{2!}f'(\xi_n)$$

   où $\xi_n \in]\lambda_{n+1}, \lambda_n[$ *(ou* $]\lambda_n, \lambda_{n+1}[$ *). Montrer que*

$$|\lambda_{n+1} - \overline{\lambda}| \leq \frac{M}{2m}|\lambda_{n+1} - \lambda_n|^2$$

   où $M = \max_{x\in[\frac{1}{10},\frac{1}{3}]} |P''(\lambda)|, \quad m = \min_{x\in[\frac{1}{10},\frac{1}{3}]} |P'(\lambda)|.$

d) *Pour* $\lambda_0 = \frac{1}{3}$, *calculer* λ_1 *et* λ_2 *avec 5 chiffres significatifs, puis estimer l'erreur* $|\lambda_2 - \overline{\lambda}|$.

5. *Comparer la rapidité de convergence des deux méthodes (Newton et point fixe).*

Exercice 3.9.
I. On considère le système linéaire $AX = b$ *où*

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. **a.** *Si l'on veut résoudre ce système par une méthode directe, laquelle utiliseriez-vous ? Justifier votre réponse.*

   b. *Déterminer la factorisation de la matrice* A *correspondante.*

2. *Soit à résoudre le système* $AX = b$ *par la méthode itérative de Gauss-Seidel.*

   a. *La méthode de Gauss-Seidel est-elle convergente pour tout choix de* $X^{(0)}$ *dans* $\mathbb{R}^3$?

   b. *Approcher* $\overline{X}$ *la solution exacte du système* $AX = b$ *à* 10^{-2} *près par la méthode de Gauss-Seidel, en prenant* $X^{(0)} =^t (0, 0, 1)$.

II. Soit A *une matrice carrée d'ordre* n *décomposée en* $A = D - E - F = \begin{pmatrix} & & -F \\ & D & \\ -E & & \end{pmatrix}$.

Afin de résouder le système de Cramer $AX = b$ *où* $b \in \mathbb{R}^n$, *on propose la méthode itérative dont la suite* $(X^{(k)})_k$ *définie par :*

$$\left(\frac{D}{\omega} - E\right) X^{(k+1)} = \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + F\right) X^{(k)} + b, \;\; \omega \in \mathbb{R}^*.$$

1. *Il s'agit de quelle méthode ? Pour quelle valeur de* ω *cette méthode coïncide avec celle de Gauss-Seidel ?*
2. *Vérifier que si la méthode converge, elle converge vers la solution exacte de* $AX = b$.
3. *Donner la matrice d'itération* B_ω *de cette méthode, en discutant son existence.*
4. *Sachant que* $\rho(B_\omega) \geq |1 - \omega|$, *que peut-on dire de la convergence de cette methode.*