Chapitre 1

Intégration numérique

1.1 Position du problème

On veut évaluer l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$. Si l'on connait sa primitive F, alors

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \text{ où } F' = f.$$

Mais dans de nombreux cas, F ne peut pas être connue.

Exemple 1.1. *:* $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\, dx,\ \int_0^1 e^{-x^2}\, dx,\ \int_0^3 \sqrt{1-5\sin x}\, dx,\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sin(x)}}\, dx.$

La plupart des fonctions qui interviennent dans les problèmes physiques sont des fonctions soit trop compliquées pour être intégrées, soit seulement données par une table de valeurs. Nous cherchons donc une valeur approchée à l'aide de sommes finies, qu'on appellera une **formule de quadrature :**

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx \simeq I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i),$$

où les $x_i,\ i = 0, \ldots, n$ sont appelés **points** d'intégration et les $\alpha_i,\ i = 0, \ldots, n$ **poids** de la formule de quadrature.

Définition 1.1. *Une formule de quadrature est dite* ***exacte*** *sur un ensemble V si*

$$\forall f \in V,\ R(f) = I(f) - I_n(f) = 0.$$

Définition 1.2. *Une formule de quadrature est dite de* ***degré de précision*** *n si elle est exacte pour $f(x) = x^k,\ k = 0, \ldots, n$ et non exacte pour $f(x) = x^{n+1}$.*

1.2 Méthodes de Newton-Cotes

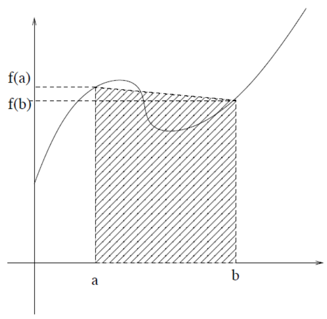
En analyse numérique, les formules de Newton-Cotes, du nom d'Isaac Newton et de Roger Cotes, servent au calcul numérique d'une intégrale sur un intervalle réel $[a, b]$, ceci à l'aide d'une interpolation polynomiale de la fonction en des points répartis uniformément. Les différentes formules de Newton cotes procèdent en trois phases distinctes :

1. Décomposition de l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles de même longueur.
2. Intégration approchée de la fonction sur chaque sous-intervalle (Formule simple).
3. Sommation des résultats numériques ainsi obtenus (Formule composite ou généralisée).

1.2.1 Méthode des trapèzes

On veut évaluer numériquement l'intégrale $I(f) = \int_a^b f(x)dx$.

Formule du trapèze simple



La méthode du trapèze simple consiste à approcher l'aire $I(f)$ comprise entre $[a, b]$ et le graphe de f par l'aire du trapèze $a\, b\, f(b)\, f(a)$. On obtient l'approximation

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b)).$$

C'est la formule du trapèz simple sur l'intervalle $[a, b]$.

Formule des trapèzes composite

On divise l'intervalle borné $[a, b]$ en n parties, $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$, de même longueur $h = \frac{b-a}{n}$. On considère les points d'intégration

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, ..., x_i = x_0 + ih\ (i = \overline{0, n}), x_n = b.$$

La formule des trapèzes composite consiste à approcher l'aire $I(f)$ par la somme des aires des n trapèzes induits par les points $x_0, x_1, ..., x_n$.
Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}],\ 0 \leq i \leq n-1$ on a

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{(x_{i+1} - x_i)}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) = \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})).$$

Donc

$$\begin{aligned} I(f) = \int_a^b f(x)dx &= \int_{a=x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{b=x_n} f(x)dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \\ &\simeq \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \\ &= \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)). \end{aligned}$$

D'où

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \simeq I_n(f) = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right].$$

C'est la formule des trapèze composite sur l'intervalle $[a, b]$.

Exemple 1.2. *Soit* $f(x) = x^2$, $a = 0, b = 1$, *on prend* $n = 3$ *subdivisions.*
Donc $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{3}, x_0 = a = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = b = 1$ *avec*
$y_0 = f(x_0) = 0, y_1 = f(x_1) = \frac{1}{9}, y_2 = f(x_2) = \frac{4}{9}$ *et* $y_3 = f(x_3) = 1$.

$$I(f) = \int_0^1 x^2\,dx \simeq I_3(f) = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + y_3) = \frac{19}{54} \approx 0,351$$

L'erreur d'approximation : on a $I(f) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \approx 0,333$, *d'où,*

$$l'erreur\ relative \approx \frac{|0{,}351 - 0{,}333|}{0{,}333} = 5,4\%.$$

Par contre, si $n = 6$, *l'erreur relative* $\approx 1,5\%$.

Remarque 1.1. *On remarque numériquement que l'erreur a été divisée-approximativement-par 4 lorsque* n *a doublé (de* $n = 3$ *à* $n = 6$*), l'erreur dépend donc de* h.

Erreur de quadrature

Recherche de l'erreur d'approximation si $f \in C^2([a,b])$

Rappel 1 : Si $g : [0,a] \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $]0,a[$, alors on peut écrire :

$$g(a) = g(0) + \int_0^a g'(t)\,dt.$$

Rappel 2 : (Théorème de la moyenne) Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, si g a un signe constant sur $[a,b]$, alors $\exists\, \xi \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(\xi)\int_a^b g(t)\,dt.$$

Rappel 3 : (Théorème des valeurs intermédiaires) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue de $\max M$ et $\min m$. Alors, $\forall\, y \in [m,M]$, $\exists\, x \in [a,b] / f(x) = y$.

Posons

$$R(f) = I(f) - I_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

avec $x_i = x_0 + ih$ $(h = \frac{b-a}{n})$ $i = 0, 1, \ldots, n$.

Considérons d'abord R_1 l'erreur commise sur le 1^{er} l'intervalle $[x_0, x_1]$

$$R_1 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx - \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_0+h)),$$

f étant donnée, on remarque que R_1 dépend seulement de h, donc $R_1 = R_1(h)$.
Dérivons R_1 une fois on obtient

$$R_1'(h) = \frac{1}{2}(f(x_0+h) - f(x_0)) - \frac{h}{2}f'(x_0+h).$$

Notons, en passant, que $R_1(0) = R_1'(0) = 0$.
Dérivons R_1', ceci est permis car $f \in C^2([a,b])$, on aura

$$R_1''(h) = -\frac{h}{2}f''(x_0+h).$$

Du rappel 1, on a

$$R_1'(h) = R_1'(0) + \int_0^h R_1''(t)\,dt = -\int_0^h \frac{t}{2} f''(x_0+t)\,dt,$$

et du rappel 2, pour $g(t) = t \geq 0\ \forall t \in [0,h], \exists\, \xi^* \in [0,h]$ et donc $\exists\, \xi_1 \in [x_0, x_0+h]$:

$$R_1'(h) = -\frac{f''(\xi_1)}{2}\int_0^h t\,dt,$$

alors $R_1'(h) = -\frac{h^2}{4}f''(\xi_1)$ avec $\xi_1 \in [x_0,x_1]$, mais (du rappel 1) :

$$R_1(h) = R_1(0) + \int_0^h R_1'(t)\,dt = -\frac{f''(\xi_1)}{4}\int_0^h t^2\,dt = -\frac{h^3}{12}f''(\xi_1),$$

$R_1(h)$ est l'erreur d'approximation sur l'intervalle $[x_0,x_1]$, auquel appartient ξ_1.
D'où l'erreur totale :

$$R(h) = \sum_{i=1}^{n} R_i(h) = -\frac{h^3}{12}(f''(\xi_1) + f''(\xi_2) + ... + f''(\xi_n)) \quad \text{où} \;\; \xi_i \in [x_i, x_{i+1}], i = \overline{0, n-1}.$$

Réécrivons $R(h)$, en muliplant et divisant par n :

$$R(h) = \sum_{i=1}^{n} = -\frac{nh^3}{12}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f''(\xi_i)}{n} = -\frac{nh^3}{12}.\overline{m}$$

où $\overline{m}$ est la moyenne arithmétique des $f''(\xi_i)$ $i = 1, ..., n$. Comme $\xi_i \in [a,b]$ $\forall\, i = \overline{0, n-1}$ et f'' est continue sur $[a,b]$; alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists\, \xi \in [a,b]$:
$\overline{m} = f''(\xi)$; d'où :

$$R(h) = -\frac{nh^3}{12}.f''(\xi) \Rightarrow |R(h)| \leq \frac{nh^3}{12}M_2$$

où $M_2 = \max\limits_{t\in[a,b]} |f''(\xi)|$. Comme $h = \frac{(b-a)}{n}$, on obtient finalement

$$|R(h)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2.$$

Ceci implique que la formule des trapèzes est exacte si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. De plus, cette formule est de degré de précision égal à 1. En effet ;
pour $f(x) = x^2,\ n = 1,\ x_0 = a,\ x_1 = b$, on a

$$I(f) = \int_a^b x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b-a}{3}\left(a^2+b^2+ab\right) \neq I_1(f) = \frac{b-a}{2}\left(a^2+b^2\right).$$

Remarque 1.2. *Cette borne d'erreur confirme notre observation sur l'exemple donné précédemment. En effet ; si n est doublé, l'erreur est alors divisée par 4 (approximativement !!). Mais le cumul d'erreurs d'arrondi (dûes au calcul numérique) fait que l'on n'atteint pas la valeur exacte de $I(f)$ lorsque n est de plus en plus grand.*

Exercice :

Reprendre l'exercice précédent avec un nombre des points (x_i, y_i) $i = 0, \ldots, n$, de plus en plus grand et observer la convergence de $I_n(f)$ vers $I(f)$.

1.2.2 Méthode de Simpson

Soit à approcher l'intégrale $I(f) = \int_a^b f(x)dx$.

Formules de Simpson simple

Dans le cadre de la méthode de Simpson simple, on divise l'intervalle $[a, b]$ en deux parties de même longueur $h = \frac{b-a}{2}$, posons $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$ et $y_i = f(x_i),\ i = 0, 1, 2$.
On interpole les trois points $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ et (x_2, y_2) par un polynôme, noté P_2, de degré inférieur ou égal à 2. Sous la forme de Newton, ce polynôme s'écrit :

$$P_2(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - x_0) + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1).$$

Donc comme $f(x) \simeq P_2(x)\ \forall\, x \in [x_0, x_2]$, on a

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, dx \simeq \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\, dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \tag{1.1}$$

Ou encore

$$\int_a^b f(x)\, dx \simeq \int_a^b P_2(x)\, dx = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)).$$

C'est la première formule de Simpson [1] simple sur l'intervalle $[a, b]$.

Formules de Simpson composite

Dans le cadre de la méthode de Simpson composite, on divise lintervalle $[a, b]$ en n parties de même longueur $h = \frac{b-a}{n}$. Comme trois points induisent deux parties, le nombre n de parties doit être pris pair ($n = 2m$). Posons

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, ..., x_i = x_0 + ih\ (i = \overline{0, n}), x_n = b.$$

On interpole chaque trois points $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), (x_{i+2}, y_{i+2})$ par un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 et on utilise la formule (1.1), on obtient la formule d'approximation

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\, dx &= \int_{a=x_0}^{x_2} f(x)\, dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\, dx + \ldots + \int_{x_{2m-2}}^{b=x_{2m}} f(x)\, dx \\
&\simeq \tfrac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \tfrac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + ... + \tfrac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) \\
&= \tfrac{h}{3}\left[y_0 + y_{2m=n} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + y_{2m-1})\right] \\
&= \tfrac{h}{3}[y_0 + y_n + 2 \sum_{i\ pair} y_i + 4 \sum_{i\ impair} y_i].
\end{aligned}$$

Donc,

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx \simeq I_n(f) = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{i\ pair} y_i + 4\sum_{i\ impair} y_i\right) \quad \text{où } h = \frac{b-a}{n}.$$

C'est la première de Simpson composite sur l'intervalle $[a, b]$.

Application à l'exemple précédent, avec $n = 4$ **:**
$f(x) = x^2,\ a = 0, b = 1, h = 1/4$, d'après la formule de Simpson

$$\int_0^1 f(x)\, dx \simeq I_4(f) = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_4 + 2y_2 + 4(y_1 + y_3)\right) = \frac{1}{12}\left(0 + 1 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} = I(f)\ ?!$$

1. Thomas Simpson, anglais, 1710-1761

Erreur de quadrature

Recherche de l'erreur d'approximation si $f \in C^4([a,b])$

En suivant une démarche quasi-analogue au cas de la méthode des trapèzes, on tire que :

$$\exists\, \xi \in [a,b],\quad R(h) = I(f) - I_n(f) = -\frac{n\,h^5}{180} f^{(4)}(\xi). \tag{1.2}$$

Par consequent,

$$|R(h)| = |I(f) - I_n(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{180 n^4} M_4, \quad \text{où} \quad M_4 = \max_{t\in[a,b]} |f^{(4)}(t)|.$$

Ceci implique que la formule de Simpson est exacte si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3. De plus, cette formule est de degré de précision égal à 3. En effet ;
pour $f(x) = x^4,\ n = 2,\ x_0 = a,\ x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$:

$$I(f) = \int_a^b x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_a^b = \frac{b-a}{5}\left(b^4 + ab^3 + a^2b^2 + a^3b + a^4\right),$$

alors que

$$I_2(f) = \frac{b-a}{6}\left(a^4 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 + b^4\right) = \frac{b-a}{24}\left(5b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + 5a^4\right).$$

On voit clairement que $I(f) \neq I_2(f)$.

Remarque 1.3. *Si n a doublé, l'erreur est divisée par 16 (approximativement), donc la présente méthode est plus performante que celle des trapèzes.*

Exercice :

Notons par $R_1 = R_1(h)$ l'erreur commise sur la subdivision $[x_0, x_2]$ ou encore sur $[x_1 - h, x_1 + h]$:

$$R_1(h) = \int_{x_1-h}^{x_1+h} f(x)\,dx - \frac{h}{3}\left(f(x_1 - h) + 4f(x_1) + +f(x_1+h)\right).$$

En utilisant, les rappels 1, 2 et 3, démontrer l'inégalité (1.2).

Proposition 1.1. *Le degré de précision des formules de Newton-Cotes[2] à (n+1) points est*

$$\begin{cases} n, & \text{si } n \text{ est impair}\,; \\ n+1, & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

L'erreur dans les formules de Newton-Cotes à $(n+1)$ points est en

$$\begin{cases} h^{n+2}, & \text{si } n \text{ est impair}\,; \\ h^{n+3}, & \text{si } n \text{ est pair,} \end{cases} \qquad \text{où } h = \frac{b-a}{n}.$$

Remarque 1.4.
1. *On peut démonter que si le degré de précision est p alors l'erreur est en h^{p+2} et réciproquement. Comme le degré de précision est facile à évaluer, il est possible d'avoir une idée de l'erreur.*
2. *On peut construire des formules de Newton-Côtes qui ne comportent pas les bornes d'intégration comme points de la formule de quadrature.*
   Par exemple, pour intégrer la fonction $\frac{\sin x}{x}$ entre 0 et 1 on peut utiliser :
   La formule du point milieu : $\int_a^b f(x)\,dx \simeq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
   La formule variante des trapèzes : $\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{(b-a)}{2}\left[f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + f\left(b - \frac{b-a}{3}\right)\right]$.
   La formule variante de Simpson : $\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{(b-a)}{8}\left[3f\left(\frac{a+5b}{6}\right) + 2f\left(\frac{b-a}{2}\right) + 3f\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right]$.

2. Roger Cotes, anglais, 1682-1716

1.3 Complément du cours

Exercice :

On se donne une fonction continue $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$. *Approcher par la méthode des trapèzes l'intégrale double suivante :*

$$I(f) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx.$$

Solution :

Supposons que $I(f)$ peut être écrit sous la forme

$$I(f) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Posons $g(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$ et divisons, par analogie au cas d'une seule variable, l'intervalle $[a, b]$ en n parties égales et l'intervalle $[c, d]$ en m parties égales. Ceci induit deux pas de discrétisation $h = \frac{b-a}{n}$ et $k = \frac{d-c}{m}$, alors

$$I(f) = \int_a^b g(x)\, dx \simeq \frac{h}{2} \left(g(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i) + g(b) \right). \tag{1.3}$$

D'autre part, on applique la formule des trapèzes pour approcher $g(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$ avec x constante et y variable, on obtient

$$g(x) \simeq \frac{k}{2} \left(f(x, c) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x, y_j) + f(x, d) \right). \tag{1.4}$$

En substituant (1.4) dans (1.3), on aura

$$\begin{aligned}
I(f) &\simeq \tfrac{h}{2}[\tfrac{k}{2}(f(a,c) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(a, y_j) + f(a, d)) \\
&\quad +2\sum_{i=1}^{n-1} \tfrac{k}{2}(f(x_i, c) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_i, y_j) + f(x_i, d)) \\
&\quad +\tfrac{k}{2}(f(b, c) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(b, y_j) + f(b, d))] \\
&= \tfrac{hk}{4}[f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d) + 2(\sum_{j=1}^{m-1} f(a, y_j) + \sum_{j=1}^{m-1} f(b, y_j)) \\
&\quad +2(\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i, c) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i, d)) + 4\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{ij}\, f(x_i, y_j)] \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \alpha_{ij}\, f(x_i, y_j)
\end{aligned}$$

où

$$x_i = a + ih,\ x_n = b \quad i = \overline{0, n}, \quad y_j = c + jk,\ y_m = d \quad j = \overline{0, m}$$

$$\alpha_{00} = \alpha_{n0} = \alpha_{m0} = \alpha_{nm} = \tfrac{hk}{4}$$

$$\alpha_{0j} = \alpha_{nj} = \alpha_{i0} = \alpha_{im} = \tfrac{hk}{2}, \quad i = \overline{1, n-1} \ \ j = \overline{1, m-1}$$

$$\alpha_{ij} = hk, \quad i = \overline{1, n-1} \ \ j = \overline{1, m-1}$$

Remarque 1.5. *Ce procédé peut être adapté au calcul numérique d'intégrales triples ou multiples.*

1.4 Exercices

Série de T.D. N°1

Exercice 1.1.
Calculer $\arctan(3)$ *par les méthodes d'intégration des trapèzes et de Simpson pour n=6.*
Indication : $\arctan(a) = \int\limits_0^a \frac{dx}{1+x^2},\ a > 0\cdot$

Exercice 1.2.
On lance une fusée verticalement du sol et l'on mesure pendant les premières 80 secondes l'accéleration γ *:*

t (en s)	*0*	*10*	*20*	*30*	*40*	*50*	*60*	*70*	*80*
γ*(en m/s²)*	*30*	*31.63*	*33.44*	*35.47*	*37.75*	*40.33*	*43.29*	*46.70*	*50.67*

Calculer la vitesse V *de la fusée à l'instant* $t = 80s$, *par la méthode des trapèzes puis par Simpson.*

Exercice 1.3.

1. *Déterminer un nombre suffisant de subdivisions* m *de l'intervalle d'intégration* $[-\pi, \pi]$ *pour évaluer à* 0.5×10^{-3} *près, par la méthode de Simpson, l'intégrale*
$$\int_{-\pi}^{\pi} cos x\, dx\cdot$$
2. *Déterminer un nombre suffisant de subdivisions des intervalles d'intégration pour évaluer à* $0,5 \times 10^{-6}$ *près, par la méthode des trapèzes les intégrales :*
$$i)\ \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}, \qquad ii)\ \int_0^1 \frac{dx}{1+\sin x}\,.$$

Exercice 1.4. *Soit* f *une fonction réelle continue et définie sur l'intervalle* $[a, b]$. *On pose* $h = \frac{b-a}{n}$ *pour* $n = 3$, $x_0 = a$, $x_3 = b$, $x_i = x_0 + ih$ $(i = \overline{0, 3})$. *On considère la formule de quadrature :*
$$I(f) = \int_a^b f(t)\, dt \simeq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

1. *Déterminer les deux coefficients* α *et* β *sachant que la méthode est exacte sur* $\mathbb{P}_1$.
2. *Généraliser l'écriture précédente au cas où* $n = 3m$.
3. *Evaluer l'erreur relative commise en utilisant cette méthode pour approcher* $I(\frac{\ln(x)}{x})$ *sur* $[1, 2]$ *en prenant* $n = 3$ *subdivisions.*

Exercice 1.5.

1. *Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange* P *d'une fonction* f *construite sur les points :*
$$-1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 1.$$
2. *Par intégration du polynôme obtenu, en déduire la formule d'intégration approchée suivante :*
$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx \frac{1}{4} f(-1) + \frac{3}{4} f(-\frac{1}{3}) + \frac{3}{4} f(\frac{1}{3}) + \frac{1}{4} f(1).$$
3. *En déduire la formule d'intégration approchée sur l'intervalle* $[a, b]$.
Indication : utiliser le changement de variable $y = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x\cdot$

4. *Application : Calculer, à l'aide de la formule de quadrature proposée, les intégrales*

$$\int_{-1}^{1} e^x \, dx, \quad \int_{-5}^{3} e^x \, dx.$$

   Calculer l' erreur commise dans chaque cas.

Exercice 1.6.
On considère la formule d'intégration numérique (M) donnée par :

$$\textbf{\textit{(M)}} \qquad \int_0^1 f(x)\,dx \approx V(f) = \frac{1}{8}(f(0) + 3f(\frac{1}{3}) + 3f(\frac{2}{3}) + f(1)).$$

1. **a)** *Déterminer p le degré de précision de la formule (M).*

   b) *Sachant que l'erreur d'approximation de la formule (M) est de la forme :*

$$R(f) = kf^{(p+1)}(\xi), \;\; \xi \in [0,1]$$

   déterminer la constante k.

2. *En déduire de la formule (M) une formule d'intégration numérique sur l'intervalle $[a,b]$.*
3. *On divise l'intervalle $[a,b]$ en $n = 3m$, $m \in \mathbb{N}^*$ parties égales de longueur $h = \frac{b-a}{n}$. Généraliser la fomule obtenue dans la question précédente.*
4. *Applications : Soit les deux intégrales :*

$$I_1 = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx, \quad I_2 = \int_0^6 e^x \, dx.$$

   a) *Calculer les intégrales I_1 et I_2 pour $n = 6$:*

      i) *par la formule des trapèzes,*

      ii) *par la formule de Simpson,*

      iii) *par la formule obtenue dans la question (3).*

   b) *Comparer les résultas obtenus dans chaque cas.*

Corrigé série de T.D. N°1

Solution 1.1. *On a* $\arctan(3) = \int_0^3 \frac{dx}{1+x^2}\cdot$ $n = 6 \Longrightarrow h = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. *Posons*

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1,\ x_3 = \frac{3}{2},\ x_4 = 2,\ x_5 = \frac{5}{2},\ x_6 = 3, \quad et \ \ y_i = \frac{1}{1+x_i^2},\ i = 0, ..., 6.$$

i) *Par la formule des trapèzes :*

$$\begin{aligned}\arctan(3) = \int_0^3 \frac{dx}{1+x^2} &\approx \frac{h}{2}\left(y_0 + 2(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5) + y_6\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(1 + 2(\frac{4}{5}+\frac{1}{2}+\frac{4}{13}+\frac{1}{5}+\frac{4}{29}) + \frac{1}{10}\right)\\ &\approx 1,2478.\end{aligned}$$

ii) *Par la formule de Simpson :*

$$\begin{aligned}\arctan(3) = \int_0^3 \frac{dx}{1+x^2} &\approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4(y_1+y_3+y_5) + 2(y_2+y_4) + y_6\right)\\ &= \frac{1}{6}\left(1 + 4(\frac{4}{5}+\frac{4}{13}+\frac{4}{29}) + 2(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}) + \frac{1}{10}\right)\\ &\approx 1,2471.\end{aligned}$$

Solution 1.2. *On sait que l'acceleration est la dérivée de la vitesse V. Donc,*

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \gamma(s)\,ds \Rightarrow V(80) = 0 + \int_0^{80} \gamma(s)\,ds.$$

Posons $I = \int_0^{80} \gamma(s)\,ds$. *Ici, d'après le tableau des valeurs, on a* $h = 10$, *alors* $n = \frac{80-0}{h} = 8$.
Posons $t_0 = 0, t_1 = 10, t_2 = 20, t_3 = 30, t_4 = 40, t_5 = 50, t_6 = 60, t_7 = 70$ *et* $t_8 = 80$.

1. *Calculons l'intégrale I par la méthode des trapèzes.*

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{h}{2}\left(\gamma(t_0) + 2\sum_{i=1}^{7}\gamma(t_i) + \gamma(t_8)\right)\\ &= \frac{10}{2}(30 + 2(31,63 + 33,44 + 35,47 + 37,75 + 40,33 + 43,29 + 46,70) + 50,67)\\ &= 3089,5m/s.\end{aligned}$$

2. *Calculons l'intégrale I par la méthode Simpson.*

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{h}{3}\left(\gamma(t_0) + 2(\gamma(t_2)+\gamma(t_4)+\gamma(t_6)) + 4(\gamma(t_1)+\gamma(t_3)+\gamma(t_5)+\gamma(t_7)) + \gamma(t_8)\right)\\ &= \frac{10}{3}(30 + 2(33,44 + 37,75 + 43,29) + 4(4(31,63 + 35,47 + 40.33 + 46,70) + 50,67)\\ &= 3087,2m/s.\end{aligned}$$

Solution 1.3.

1. *Soit* $I = \int_{-\pi}^{\pi} cosx\,dx\cdot$ *Le pas d'intégration est* $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2\pi}{n}$.
   D'autre part l'erreur de quadrature de la méthode de Simpson est donnée par :

$$E(h) = \frac{-nh^5}{180} f^{(4)}(\xi) = \frac{-(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi) = \frac{-2\pi h^4}{180}(\frac{2\pi}{n})^4\cos(\xi),$$

   où $\xi \in [a,b]$, *par conséquent,*

$$|E(h)| \leq |\frac{-2\pi h^4}{180}(\frac{2\pi}{n})^4|.$$

   Ainsi pour que $|E(h)| \leq 0,5 \times 10^{-3}$ *il suffit que n vérifie* $|\frac{-2\pi h^4}{180}(\frac{2\pi}{n})^4| \leq 0,5 \times 10^{-3}$, *donc,* $n^4 \geq \frac{16\pi^5}{45\times 10^{-3}}$. *Ainsi n vérifie* $n \geq 18.162$. *On prendra par exemple* $n = 20$, *car pour la méthode de Simpson, le nombre de subdivisions de l'intervalle [a, b] doit toujours tre pair.*

2. *Ici on utilise l'erreur de quadrature de méthode des trapèzes.*

Solution 1.4. *Soit f une fonction réelle continue et définie sur l'intervalle $[a,b]$. On pose $h = \frac{b-a}{n}$ pour $n=3$, $x_0 = a$, $x_3 = b$, $x_i = x_0 + ih$ $(i = \overline{0,3})$. On considère la formule de quadrature :*

$$I(f) = \int_a^b f(t)\,dt \simeq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

1. *Déterminer les deux coefficients α et β sachant que la méthode est exacte sur $\mathbb{P}_1$.*
2. *Généraliser l'écriture précédente au cas où $n = 3m$.*
3. *Evaluer l'erreur relative commise en utilisant cette méthode pour approcher $I(\frac{\ln(x)}{x})$ sur $[1,2]$ en prenant $n=3$ subdivisions.*

Solution 1.5. 1. *On pose $x_0 = -1,\ x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = 1$. Les polynômes élémentaires de Lagrange associés sont :*

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \tfrac{(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})(x-1)}{(-1+\frac{1}{3})(-1-\frac{1}{3})(-1-1)} = -\tfrac{9}{16}(x^3 - x^2 - \tfrac{1}{9}x + \tfrac{1}{9}).\\
L_1(x) &= \tfrac{(x+1)(x-\frac{1}{3})(x-1)}{(-\frac{1}{3}+1)(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3}-1)} = \tfrac{27}{16}(x^3 - \tfrac{1}{3}x^2 - x + \tfrac{1}{3}).\\
L_2(x) &= \tfrac{(x+1)(x+\frac{1}{3})(x-1)}{(\frac{1}{3}+1)(\frac{1}{3}+\frac{1}{3})(\frac{1}{3}-1)} = -\tfrac{27}{16}(x^3 + \tfrac{1}{3}x^2 - x - \tfrac{1}{3}).\\
L_3(x) &= \tfrac{(x+1)(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})}{(1+1)(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3})} = \tfrac{9}{16}(x^3 + x^2 - \tfrac{1}{9}x - \tfrac{1}{9}).
\end{aligned}$$

Le polynôme d'interpolation de Lagrange s'écrit

$$P(x) = f(-1)L_0(x) + f(-\frac{1}{3})L_1(x) + f(\frac{1}{3})L_2(x) + f(1)L_3(x).$$

2. *Nous intégrons le polynôme P sur $[-1,1]$,*

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx &\approx \textstyle\int_{-1}^1 P(x)\,dx\\
&= f(-1)\textstyle\int_{-1}^1 L_0(x)\,dx + f(-\frac{1}{3})\int_{-1}^1 L_1(x)\,dx + f(\frac{1}{3})\int_{-1}^1 L_2(x)\,dx + f(1)\int_{-1}^1 L_3(x)\,dx\\
&= \tfrac{1}{4}f(-1) + \tfrac{3}{4}f(-\tfrac{1}{3}) + \tfrac{3}{4}f(\tfrac{1}{3}) + \tfrac{1}{4}f(1)
\end{aligned}$$

3. *En déduire la formule d'intégration approchée sur un intervalle $[a,b]$.*
Posons $y = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\,x$, alors

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_a^b f(y)\,dy &= \tfrac{b-a}{2}\textstyle\int_{-1}^1 f(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\,x)\,dx\\
&= \tfrac{b-a}{2}\textstyle\int_{-1}^1 g(x)\,dx \quad (\text{ posons } g(x) = f(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\,x))\\
&\approx \tfrac{b-a}{2}(\tfrac{1}{4}g(-1) + \tfrac{3}{4}g(-\tfrac{1}{3}) + \tfrac{3}{4}g(\tfrac{1}{3}) + \tfrac{1}{4}g(1))\\
&= \tfrac{b-a}{2}\left(\tfrac{1}{4}f(a) + \tfrac{3}{4}f(\tfrac{1}{3}(b+2a)) + \tfrac{3}{4}f(\tfrac{1}{3}(a+2b)) + \tfrac{1}{4}f(b)\right).
\end{aligned}$$

4. *Application numérique :*
   (a) $\int_{-1}^1 e^x\,dx \approx \frac{1}{4}e^{-1} + \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{4}e^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{4}e = 2,3556$
   L'erreur commise est $|(e - \frac{1}{e}) - 2,3556| = 0.0052.$

(b) $\int_{-5}^{3} e^x\,dx \approx \frac{8}{2}\left(\frac{1}{4}e^{-5}+\frac{3}{4}e^{-\frac{7}{3}}+\frac{3}{4}e^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{4}e^{3}\right)=22,533$
L'erreur commise est $|(e^3-\frac{1}{e^5})-22,533|=2,454$.

Solution 1.6.
On considère la formule d'intégration numérique (M) *donnée par :*

$$\textbf{(M)}\qquad \int_0^1 f(x)\,dx \approx V(f)=\frac{1}{8}(f(0)+3f(\frac{1}{3})+3f(\frac{2}{3})+f(1)).$$

1. **a)** *Déterminons p le degré de précision de la formule (M). On a*

$$\left\{\begin{array}{lll} \int_0^1 dx=1 & et & V(1)=1\\ \int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2} & et & V(x)=\frac{1}{2}\\ \int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3} & et & V(x^2)=\frac{1}{3}\\ \int_0^1 x^3\,dx=\frac{1}{4} & et & V(x^3)=\frac{1}{4}\\ \int_0^1 x^4\,dx=\frac{1}{5} & et & V(x^4)=\frac{11}{54}\neq\frac{1}{5}.\end{array}\right.$$

Donc $p=3$.

b) *Soit* $R(f)=\int_0^1 f(x)\,dx-V(f)=kf^{(4)}(\xi),\ \ \xi\in[0,1]$. *Déterminons la constante* k.
Pour $f(x)=x^4$ *on trouve* $f^{(4)}(x)=4!=24$. *Donc*
d'une part, on a $R(x^4)=\int_0^1 x^4\,dx-V(x^4)=\frac{1}{5}-\frac{11}{54}=-\frac{1}{270}$,
et d'autre part, on a $R(x^4)=24k$.
Ce qui donne

$$24k=-\frac{1}{270}\Longrightarrow k=-\frac{1}{6480}.$$

2. *On en déduit la formule d'intégration approchée sur un intervalle* $[a,b]$.
Posons $x=(b-a)y+a$, *alors*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= (b-a)\int_0^1 f((b-a)y+a)\,dy\\ &= (b-a)\int_0^1 g(y)\,dy \quad (\text{ posons } g(y)=f((b-a)y+a)\\ &\approx \frac{b-a}{8}(g(0)+3g(\tfrac{1}{3})+3g(\tfrac{2}{3})+g(1))\\ &= \frac{b-a}{8}\left(f(a)+3f(\tfrac{b+2a}{3})+3f(\tfrac{a+2b}{3})+f(b)\right).\end{aligned}$$

3. *On divise l'intervalle* $[a,b]$ *en* $n=3m,\ m\in\mathbb{N}^*$ *parties égales de longueur* $h=\frac{b-a}{n}$.
Généralisons la fomule obtenue dans la question précédente. Posons

$$x_j=a+jh\ \ et\ \ y_j=f(x_j),\ \ j=0,...,n.$$

On a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_{3m}} f(x)\,dx\\ &= \sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_{3i}}^{x_{3i+3}} f(x)\,dx\\ &\approx \frac{x_{3i+3}-x_{3i}}{8}\left(\sum_{i=0}^{m-1}(f(x_{3i})+3f(\tfrac{x_{3i+3}+2x_{3i}}{3})+3f(\tfrac{2x_{3i+3}+x_{3i}}{3})+f(x_{3i+3}))\right)\\ &= \frac{3h}{8}(y_0+3y_1+3y_2+y_3)+\frac{3h}{8}(y_3+3y_4+3y_5+y_6)\\ &\quad +...+\frac{3h}{8}(y_{3m-3}+3y_{3m-2}+3y_{3m-1}+y_{3m})\\ &= \frac{3h}{8}[y_0+y_{3m=n}+3(y_1+y_2+y_4+y_5+...+y_{3m-2}+y_{3m-1})\\ &\quad +2(y_3+y_6+...+y_{3m-3})]\\ &= \frac{3}{8}h\left(f(x_0)+f(x_n)+3\sum_{i=0}^{m-1}(y_{3i+1}+y_{3i+2})+2\sum_{i=1}^{m-1}y_{3i}\right).\end{aligned}$$

4. *Applications : Soit l'intégrale :* $I_1 = \int_{-1}^{1} x^2\,dx$. *Ici* $f(x) = x^2$, $[a,b] = [-1,1]$.

a) $n = 6 \Longrightarrow h = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. *Posons*

$$x_0 = -1,\ x_1 = -\frac{2}{3},\ x_2 = -\frac{1}{3},\ x_3 = 0,\ x_4 = \frac{1}{3},\ x_5 = \frac{2}{3},\ x_6 = 1,\quad et\ \ y_i = x_i^2,\ i = 0, ..., 1.$$

i) *Par la formule des trapèzes :*

$$\begin{aligned} I_1 \approx I_T &= \tfrac{h}{2}\left(y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) + y_6\right) \\ &= \tfrac{1}{6}\Big(1 + 2(\tfrac{4}{9} + \tfrac{1}{9} + 0 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9}) + 1\Big) \\ &= \tfrac{38}{54}. \end{aligned}$$

ii) *Par la formule de Simpson :* $I_S = I_1 = \frac{2}{3}$,
car $f \in \mathbb{P}_2$ *et la formule de Simpson est de degré de précision* $p = 3$.

iii) *Par la formule obtenue dans la question (3) :*$I_M = I_1 = \frac{2}{3}$,
car $f \in \mathbb{P}_2$ *et la formule (M) est de degré de précision* $p = 3$.

b) *Les formules (M) et de Simpson sont plus précises que celle des trapèzes car elles sont de degré de précision* $p = 3$ *et celle des trapèzes est de degré* $p = 1$.

Soit l'intégrale : $I_2 = \int_0^6 e^x\,dx$. *Ici* $f(x) = e^x$, $[a,b] = [0,6]$.

a) $n = 6 \Longrightarrow h = \frac{6}{6} = 1$. *Posons*

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5,\ x_6 = 6,\quad et\ \ y_i = e^{x_i},\ i = 0, ..., 6.$$

i) *Par la formule des trapèzes :*

$$\begin{aligned} I_2 \approx I_T &= \tfrac{h}{2}\left(y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) + y_6\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(1 + 2(e + e^2 + e^3 + e^4 + e^5) + e^6\right) \\ &\approx 435,42. \end{aligned}$$

ii) *Par la formule de Simpson :*

$$\begin{aligned} I_2 \approx I_T &= \tfrac{h}{3}\left(y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4) + y_6\right) \\ &= \tfrac{1}{3}\left(1 + 4(e + e^3 + e^5) + 2(e^2 + e^4) + e^6\right) \\ &\approx 404,42. \end{aligned}$$

iii) *Par la formule obtenue dans la question (3) :*

$$\begin{aligned} I_2 \approx I_T &= \tfrac{3h}{8}\left(y_0 + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5) + 2(y_3 + y_4) + y_6\right) \\ &= \tfrac{3}{8}\left(1 + 3(e + e^2 + e^4 + e^5) + 2e^3 + e^6\right) \\ &\approx 406,48. \end{aligned}$$

b) *On a* $I_2 = \int_0^6 e^x\,dx = e^6 - 1$. *Donc*

$$E_T = |I_2 - I_T| = 32,99$$

$$E_S = |I_2 - I_S| = 1,99$$

$$E_M = |I_2 - I_M| = 4,05.$$

Remarquons que $E_S < E_M < E_T$. *Donc la méthode la plus précise est celle de Simpson et la plus moins précise est celle des trapèzes.*

Exercices supplémentaires corrigés

Exercice :

1. **a)** *Rappeler la définition du degré de précision d'une formule de quadrature.*
   b) *Trouver les poids α_1, α_2 et α_3, tels que le degré de précision de la formule de quadrature proposée soit minimal.*
   c) *Trouver le degré de précision p de la formule de quadrature proposée.*
2. *Construire à partir de cette formule de quadrature sur $[0,1]$ une formule de quadrature sur $[a,b]$.*
3. *On subdivise $[a,b]$ en n parties égales de longueur h. Généraliser la formule de quadrature obtenue sur $[a,b]$.*
4. *Application numérique :*
   utiliser la formule de quadrature trouvée pour calculer $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ et $\int_3^5 e^{-x^2}\,dx$.

Soit $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$. Afin d'approcher numériquement l'intégrale $I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$, on considère la formule de quadrature

$$V(f) = \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f(1) + \alpha_3 f'(0), \quad \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,3.$$

1. **a)** *Rappeler la définition du degré de précision d'une formule de quadrature.*
   b) *Trouver les poids α_1, α_2 et α_3, tels que le degré de précision de la formule de quadrature proposée soit minimal.*
   c) *Trouver le degré de précision p de la formule de quadrature proposée.*
2. *Construire à partir de cette formule de quadrature sur $[0,1]$ une formule de quadrature sur $[a,b]$.*
3. *On subdivise $[a,b]$ en n parties égales de longueur h. Généraliser la formule de quadrature obtenue sur $[a,b]$.*
4. *Application numérique :*
   utiliser la formule de quadrature trouvée pour calculer $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ et $\int_3^5 e^{-x^2}\,dx$.

Solution :

On considère la formule de quadrature :

$$V(f) = \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f(1) + \alpha_3 f'(0), \quad \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,3.$$

1. **a)** *Une formule de quadrature est dite de degré de précision p si elle est exacte pour $f(x) = x^k,\ k = 0,\dots,p$ et non exacte pour $f(x) = x^{p+1}$.*
   b) *On a trois paramètres à déterminer, donc on impose que la formule proposée est exacte pour des polynômes de degré inférieur ou égal plus 2, on aura donc le système de trois équations*

$$\begin{cases} \int_0^1 1\,dx = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \int_0^1 x\,dx = \alpha_2 + \alpha_3 \\ \int_0^1 x^2\,dx = \alpha_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{1}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{2}{3} \\ \alpha_2 = \frac{1}{3} \\ \alpha_3 = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Donc

$$V(f) = \frac{1}{3}\left(2f(0) + f(1) + \frac{1}{2}f'(0)\right).$$

c) *La formule de quadrature trouvée a degré de précision p au moins égal à 2, or* $V(x^3) = \frac{1}{3} \neq \int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{4}$. *Donc* $p = 2$.

2. *Construire à partir de cette formule de quadrature sur* $[0,1]$ *une formule de quadrature sur* $[a,b]$. *On utilise le changement de variable* $y = (b-a)x + a$, *on obtient*

$$\int_a^b f(y)\, dy = \int_0^1 f((b-a)x + a)(b-a)dx.$$

Posons $g(x) = f((b-a)x+a)$, *on aura*

$$\begin{array}{rcl} \int_a^b f(y)\,dy & = & (b-a)\int_0^1 g(x)\,dx \\ & \approx & (b-a)\left(\frac{2}{3}g(0) + \frac{1}{3}g(1) + \frac{1}{6}g'(0)\right) \\ & = & \frac{b-a}{3}\left(2f(a) + f(b) + \frac{b-a}{2}f'(a)\right). \end{array}$$

3. *Généralisation : On subdivise* $[a,b]$ *en n parties égales de longueur h, posons* $x_0 = a, x_n = b, x_i = x_0 = ih,\ i = \overline{1, n-1}$.

$$\begin{array}{rcl} \int_a^b f(x)\,dx & = & \sum\limits_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \\ & \approx & \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{h}{3}\left(2f(x_i) + f(x_{i+1}) + \frac{h}{2}f'(x_i)\right) \\ & = & \frac{h}{3}\left(2\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(x_i) + \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) + \frac{h}{2}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f'(x_i)\right). \end{array}$$

4. *Application numérique :*

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx V(e^{-x^2}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-1} \quad et \quad \int_3^5 e^{-x^2}\,dx \approx V(e^{-x^2}) = \frac{2}{3}(2e^{-9} + e^{-25} - 6e^{-9}).$$

Exercice :

Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On considère la méthode d'intégration numérique* (M) *donnée par :*

$$\textbf{(M)} \qquad \int_{-1}^1 f(x)\,dx \simeq f(\alpha) + f(-\alpha) \quad avec\ \alpha \in [0,1].$$

1. **a)** *Calculer l'erreur*

$$E(f) = \int_{-1}^1 f(x)\,dx - [f(\alpha) + f(-\alpha)],$$

pour $f(x) = 1, x, x^2$ *respectivement.*

b) *Déterminer p le degré de précision (l'ordre) de la méthode* (M) *en fonction de* α.

2. *En utilisant un changement de variable affine approprié, déduire de* (M) *la formule d'intégration approchée sur l'intervalle* $[a,b]$.

3. *Généraliser la fomule précédente en divisant l'intervalle* $[a,b]$ *en n parties égales de longueur* $h = \frac{b-a}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

4. *Applications : Approcher l'intégrale* $I = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx$ *:*

i) *Par la formule des trapèzes simple.*

ii) *Par la formule obtenue dans la question (3) pour* $\alpha = \frac{1}{3}$.

iii) *Par la formule obtenue dans la question (3) pour* $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Estimer l'erreur commise dans chaque cas et comparer les résultats obtenus.

Solution :

On considère la méthode d'intégration numérique (M) donnée par :

$$\textbf{(M)} \qquad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq f(\alpha)+f(-\alpha) \quad \text{avec } \alpha\in[0,1].$$

1. **a)** *Calculer, pour $f(x)=1,x,x^2$, l'erreur $E(f)=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx-[f(\alpha)+f(-\alpha)]$. On a*

$$\begin{array}{lcl} E(1) &=& 0,\ \forall\,\alpha\in\mathbb{R}\\ E(x) &=& 0,\ \forall\,\alpha\in\mathbb{R}\\ E(x^2) &=& \frac{2}{3}-2\alpha^2. \end{array}$$

   b) *Remarquons que $E(x^2)=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$. La méthode (M) est donc toujours au moins de degré de précision (d'ordre) $p=1$. Elle est de degré de précision $p=3$ uniquement si $\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$.*

2. *En on déduit de la formule (M) la formule d'intégration approchée sur l'intervalle $[a,b]$. Posons $x=\beta y+\gamma$. On cherche, en fonction de a et b, les coefficients β et γ qui vérifient le système :*

$$\left\{\begin{array}{l} a=-\beta+\gamma\\ b=\beta+\gamma\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta=\frac{b-a}{2}\\ \gamma=\frac{a+b}{2}\end{array}\right.$$

   En faisant donc le changement de variable $x=\frac{b-a}{2}y+\frac{a+b}{2}$, on aura

$$\begin{array}{lcl} \int_a^b f(x)\,dx &=& \frac{b-a}{2}\int_0^1 f(\frac{b-a}{2}y+\frac{a+b}{2})\,dy\\ &=& \frac{b-a}{2}\int_0^1 g(y)\,dy \quad (\text{ posons } g(y)=f(\frac{b-a}{2}y+\frac{a+b}{2})\\ &\simeq& \frac{b-a}{2}(g(\alpha)+g(-\alpha))\\ &=& \frac{b-a}{2}\left(f(\frac{b-a}{2}\alpha+\frac{a+b}{2})+f(-\frac{b-a}{2}\alpha+\frac{a+b}{2})\right),\ \alpha\in[0,1]. \end{array}$$

3. *Généralisons la fomule précédente en divisant l'intervalle $[a,b]$ en n parties égales de longueur $h=\frac{b-a}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $x_i=a+ih$, $i=0,...,n$. On a*

$$\begin{array}{lcl} \int_a^b f(x)\,dx &=& \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx\\ &\approx& \frac{h}{2}\left(f(\frac{h}{2}\alpha+\frac{x_i+x_{i+1}}{2})+f(-\frac{h}{2}\alpha+\frac{x_i+x_{i+1}}{2})\right),\ \alpha\in[0,1]. \end{array}$$

4. *Applications : Approcher l'intégrale $I=\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx$:*

   i) *Par la formule des trapèzes simple :*

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx \approx I_T=\frac{\pi+\pi}{2}(\cos(-\pi)+\cos(\pi))=-2\pi.$$

   ii) *Par la formule obtenue dans la question (3) pour $\alpha=\frac{1}{3}$:*

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx \approx I_{M_1}=\frac{\pi+\pi}{2}\left(\cos(\frac{\pi}{3}+0)+\cos(-\frac{\pi}{3}+0)\right)=\pi.$$

   iii) *Par la formule obtenue dans la question (3) pour $\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$:*

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx \approx I_{M_2}=\pi\left(\cos(\frac{\pi}{\sqrt{3}})+\cos(-\frac{\pi}{\sqrt{3}})\right)=2\pi\cos(\frac{\pi}{\sqrt{3}})\approx -1,5119.$$

On a $I=\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx=0$, *alors* $|I-I_T|=2\pi>|I-I_{M_1}|\pi>|I-I_{M_1}|=1,5119$.
Donc la formule la plus précise est celle obtenue dans la question (3) avec $\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice :

Soit la fonction $g(x)=\frac{1}{1-x}$, $x\in\mathbb{R}-\{1\}$.

1. *Calculer* $F(x)=\int_0^x g(t)\,dt$, $x<1$. *Quelle est la valeur de* $F(x)$ *en* $x=\frac{2}{3}$?
2. **a)** *Trouver les coefficients* α,β *et* γ, *tels que pour tout polynôme* P *de degré inférieur ou égal à 2, on ait*
$$\int_0^2 P(x)\,dx=\alpha\,P(0)+\beta\,P(1)+\gamma\,P(2).$$
   b) *En utilisant un changement de variable, déduire de la formule précédente les coefficients* a,b *et* c *tels que pour tout polynôme* q *de degré inférieur ou égal à 2, on ait*
$$\int_0^{\frac{2}{3}} Q(x)\,dx=a\,Q(0)+b\,Q(\frac{1}{3})+c\,Q(\frac{2}{3}).$$
   c) *Sachant que le polynôme d'interpolation de la fonction* g *aux points* $0,\frac{1}{3}$ *et* $\frac{2}{3}$ *est donné par* $P_2(x)=\frac{9}{2}x^2+1$, *utiliser la formule précédente pour approximer* $\ln 3$.

Solution :

Soit la fonction $g(x)=\frac{1}{1-x}$, $x\in\mathbb{R}-\{1\}$.

1. $F(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}\,dt=-\ln(1-x)$, $x<1$ *et* $F(\frac{2}{3})=\ln 3$.
2. **a)** *Trouvons les coefficients* α,β *et* γ, *tels que pour tout polynôme* P *de degré inférieur ou égal à 2, on ait*
$$\int_0^2 P(x)\,dx=\alpha\,P(0)+\beta\,P(1)+\gamma\,P(2).$$
   On pose $P(x)=1$, $P(x)=x$ *et* $P(x)=x^2$, *on trouve le système*
$$\begin{cases}\int_0^2 1\,dx=2=\alpha+\beta+\gamma\\ \int_0^2 x\,dx=2=\beta+2\gamma\\ \int_0^2 x^2\,dx=\frac{8}{3}=\beta+4\gamma\end{cases}$$
   ce qui donne $\alpha=\beta=\frac{1}{3}$ *et* $\gamma=\frac{4}{3}$.

   b) *En utilisant le changement de variable* $y=3x$, *on aura*
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2}{3}} Q(x)\,dx &= \frac{1}{3}\int_0^2 Q(\tfrac{y}{3})\,dy\\ &= \frac{1}{3}\int_0^2 P(y)\,dy\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}P(0)+\frac{1}{3}P(1)+\frac{4}{3}P(2)\right)\\ &= \frac{1}{9}Q(0)+\frac{1}{9}Q(\tfrac{1}{3})+\frac{4}{9}Q(\tfrac{2}{3})\end{aligned}$$
   On trouve donc, $a=b=\frac{1}{9}$ *et* $c=\frac{4}{9}$.

   c) *On a* $P_2\in\mathbb{P}_2$, *alors*
$$\ln 3=\int_0^{\frac{2}{3}} g(x)\,dx\approx\int_0^{\frac{2}{3}} P_2(x)\,dx=\frac{1}{9}P_2(0)+\frac{1}{9}P_2(\frac{1}{3})+\frac{4}{9}P_2(\frac{2}{3}).$$
   D'où l'approximation
$$\ln 3\approx\frac{10}{9}.$$

Devoir

Exercice 1.7. *Soit l'intégrale*

$$I = \int_1^2 x e^{x^2}\, dx$$

1. *Calculer l'intégrale I analytiquement.*
2. *Approcher l'intégrale I par **une application** de la méthode des trapèzes.*
3. *Approcher l'intégrale I par **une application** de la méthode de Simpson.*
4. *Donner l'erreur relative commise dans chaque cas en pourcentage.*

Exercice 1.8. *Soit f une fonction continue donnée sur l'intervalle $[-1,1]$. Notons par P le polynôme de degré deux qui interpole f en les points $-1, 0$ et 1.*

1. *Exprimer $\int_{-1}^1 P(t)\, dt$ en fonction de $f(-1), f(0)$ et $f(1)$.*
2. *Vérifier que l'expression obtenue coïncide avec une formule d'intégration numérique dont on donnera le nom et la valeur du pas de discrétisation.*

Exercice 1.9. ***(Méthode du point mileu)***
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Afin d'approcher son intégrale sur $[a,b]$ en $(n = 2m)$ parties égales de longueur h. On pose $x_0 = a$, $x_n = b\, x_i = x_0 + ih$, $y_i = f(x_i)$ $(i = \overline{0,n})$.
La méthode proposée consiste à remplacer, pour $(i = 0, 2, 4, ..., n-2)$, l'intégrale $\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\, dx$ par l'aire du rectangle de côtés $f(x_{i+1})$ et $(x_{i+2} - x_i)$.

1. *Trouver les $(n+1)$ coefficients réels $(a_i = a_i(h))$ tels que*

$$I = \int_a^b f(x)\, dx \simeq \sum_{i=0}^n a_i\, y_i = V(h)$$

2. *Si f est suffisamment continûment dérivable, déterminer l'expression de l'erreur d'intégration $R(h) = I - V(h)$*
3. *Dans quel(s)cas la méthode est-elle exacte ?*
4. *Trouver $\lim R(h)$ quand h tend vers 0.*
5. *Quel est le nombre minimal de subdivisions à effectuer sur l'intervalle $[1,2]$ pour que l'erreur absolue commise sur l'intégrale de $f(x) = \frac{1}{x}$ ne dépasse pas 2×10^{-4}.*

Exercice 1.10. ***(Méthode des réctangles)***
On considère lintégrale $\int_a^b f(x)dx$. On se donne une subdivision $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de l'intervalle $[a,b]$ tel que $x_i = a + ih$ où $h = \frac{b-a}{n}$. Dans la méthode des rectangles, on remplace la fonction f par une fonction constante par morceaux. Soit g la fonction définie par

$$g(x) = f(x_i) \quad \textit{pour } x \in [x_i, x_{i+1}].$$

1. *Posons $S = \int_a^b g(x)dx$. Montrer que $S = h \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(a+ih)$.*
2. *On suppose que la fonction f est continue sur lintervalle $[a,b]$ et continûment dérivable sur lintervalle ouvert $]a,b[$. On pose*

$$\phi(h) = \int_\alpha^{\alpha+h} f(x)dx - hf(\alpha) \quad \textit{où } a \le \alpha < \alpha + h \le b.$$

Montrer quil existe un nombre $c \in]0,h[$ tel que $\phi(h) = \frac{h^2}{2} f'(c+\alpha)$.

3. *On suppose que* $|f'(x)| \leq k, \ \forall\, x \in [a,b]$. *Montrer que*

$$|\int_a^b f(x)dx - S| \leq k\frac{(b-a)^2}{2n}\cdot$$

Exercice 1.11. *Soient* a *et* h *deux réels donnés,* $h > 0$. *On pose*

$$E(f) = \int_a^{a+h} f(x)dx - \alpha h f(a) - \beta h f(a + \tau h).$$

1. *Déterminer les valeurs de* α, β *et* τ *de sorte que l'on ait*

$$\forall\, p \in \mathbb{P}_2, \quad E(p) = 0.$$

2. *Supposons que* $\alpha = \frac{1}{4}, \ \beta = \frac{3}{4}, \ \tau = \frac{2}{3}$.
3. *Trouver l'ordre de précision de la méthode proposée.*
   a) *Montrer que pour toute fonction* $f \in C^3(\mathbb{R})$ *il existe* $\theta \in]0,1[$ *tel que*

$$E(f) = K\, h^4 f^{(3)}(a + \theta h) \qquad \text{où } K \text{ est une constante indépendante de } f$$

   Indication : *on pourra considérer l'application* $R: \ [0,h] \to \mathbb{R}$ *définie par :* $R(h) = E(f)$ *et on remarque que* $R(0) = R'(0) = 0$.

   b) *Calculer* K *puis l'erreur relative commise lorsque* $f(x) = (x-a)^3$.