

Chapitre 3

Résolution des systèmes linéaires

3.1 Position du problème

On appelle système linéaire d'ordre n , ($n \in \mathbb{N}^*$), une expression de la forme

$$AX = b, \quad (3.1)$$

où $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, désigne une matrice carrée d'ordre n de nombres réels ou complexes, $b = (b_i)$, $1 \leq i \leq n$, un vecteur colonne réel ou complexe et $X = (x_i)$, $1 \leq i \leq n$, est le vecteur des inconnues du système. La relation (3.1) équivaut aux équations

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

La matrice A est dite régulière (inversible) si $\det(A) \neq 0$; on a existence et unicité de la solution X si et seulement si la matrice A est inversible.

On cherche à résoudre le système linéaire (3.1).

Théoriquement, si A est inversible, la solution du système $AX = b$ est donnée par la formule de Cramer¹ :

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

où A_i est une matrice obtenue à partir de A en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par le vecteur b . Cependant l'application de cette formule est inacceptable pour la résolution pratique des systèmes, car son coût (ou nombre d'opérations) est en $O((n+1)!)$. Par exemple, sur un ordinateur effectuant 10^9 opérations par seconde il faudrait au moins 10^{47} années pour résoudre un système linéaire de seulement 50 équations.

Il faut donc développer des algorithmes alternatifs avec un coût raisonnable. Ce problème est un des plus importants de l'analyse numérique.

Dans les sections suivantes plusieurs méthodes sont analysées. Ces méthodes se divisent en deux catégories :

- a) **Méthodes directes** : Ce sont des méthodes qui permettent d'obtenir la solution X de (3.1), si l'ordinateur faisait des calculs exacts, en un nombre fini (en relation avec n) d'opérations élémentaires.
- b) **Méthodes itératives** : Ce sont des méthodes qui consistent à construire une suite de vecteurs $X^{(n)}$ convergeant vers la solution X .

1. Gabriel Cramer, 1704-1752

Dans toute la suite de ce chapitre, on suppose que A est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$, où $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrée d'ordre n à coefficients réels.

Remarque 3.1. *Le fait que les coefficients de A soient réels n'est pas restrictif. En effet ; supposons que l'on veut résoudre (3.1) dans \mathbb{C} , c'est-à-dire*

$$(A + iB)(X + iY) = b + ic, \quad \text{où } A, B \in M_n(\mathbb{R}) \text{ and } X, Y, a, b \in \mathbb{R}^n.$$

On peut le réécrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

ou encore

$$A'X' = b' \tag{3.2}$$

avec (3.2) est un système réel de $(2n)$ équations à $(2n)$ inconnues.

3.2 Méthodes directes

3.2.1 Systèmes particuliers

Système diagonal

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ où $a_{ij} = 0$, si $i \neq j$ et $a_{ii} \neq 0 \forall i = \overline{1, n}$.

Posons $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ et $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^t$. Alors

$$AX = b \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{22}x_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \implies x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, i = \overline{1, n},$$

donc la solution est $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ où $x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$ avec $i = \overline{1, n}$.

Coût : n divisions.

Système triangulaire supérieur

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ où $a_{ij} = 0$ si $i > j$ et $a_{ii} \neq 0 \forall i = \overline{1, n}$. Alors

$$AX = b \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

donc le système $AX = b$ se résout par la méthode ascendante, c'est-à-dire on trouve d'abord x_n puis x_{n-1}, \dots , puis x_1 ; d'où les relations :

$$\begin{cases} x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}, \\ x_i = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j), \quad i = n-1, \dots, 1. \end{cases}$$

Coût : $\frac{n(n-1)}{2}$ additions (ou soustractions) + $\frac{n(n-1)}{2}$ multiplications + n divisions = n^2 opérations. En effet ;

- Le nombre de divisions étant évident.
- Pour calculer x_i ($i = 1, \dots, n$), on fait $(n - i)$ additions et $(n - i)$ multiplications, d'où

$$\text{coût } (+) = \text{coût } (\times) = \sum_{i=1}^n (n - i) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Système triangulaire inférieur

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ où $a_{ij} = 0$ si $i < j$ et $a_{ii} \neq 0 \forall i = \overline{1, n}$. Alors

$$AX = b \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ \vdots \quad \ddots \\ \vdots \quad \ddots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

donc le système $AX = b$ se résout par la méthode descendante, c'est-à-dire on trouve d'abord x_1 puis x_2, \dots , puis x_n ; d'où les relations :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, \\ x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j \right), \quad i = 2, \dots, n. \end{cases}$$

Coût : $\frac{n(n-1)}{2}$ additions (ou soustractions), $\frac{n(n-1)}{2}$ multiplications et n divisions.

Remarque 3.2. Les coûts des trois méthodes précédentes sont valables (point de vue calcul sur machine) pour n pas assez grand (≤ 100), on s'efforcera donc -dans toute la suite concernant la catégorie des méthodes directes- de transformer la matrice A du système $AX = b$ afin de nous ramener au cas triangulaire (le plus souvent) et même au cas diagonal.

3.2.2 Méthode d'élimination de Gauss

Comme les systèmes triangulaires sont faciles et économiques à résoudre, l'objectif est de transformer tout système linéaire en système triangulaire équivalent. Bien que cette méthode soit parmi les plus anciennes qui ont été proposées pour résoudre les systèmes linéaires elle reste encore actuellement la plus utilisée ; en particulier son algorithme est d'exploitation aisée sur micro-ordinateur.

Principe de la méthode :

Déterminer une matrice M inversible telle que la matrice MA soit triangulaire supérieure. Alors

$$AX = b \Leftrightarrow (MA)X = Mb,$$

ensuite résoudre le système triangulaire supérieur $(MA)X = Mb$ par la méthode ascendante.

Remarque 3.3. En pratique on ne calcule pas M d'une façon explicite, mais par des transformations équivalentes on ramène le système de départ en un système à matrice triangulaire supérieure. Autrement dit

$$(A, b) \xrightarrow{\text{transformation}} (A^{(n)}, b^{(n)}),$$

où $A^{(n)}$ est une matrice triangulaire supérieure, puis on résout le système triangulaire.

$$A^{(n)}X = b^{(n)}.$$

Algorithme d'élimination de Gauss :

On pose $A^{(1)} = A$ et $b^{(1)} = b$

$$\left(A^{(1)} : b^{(1)} \right) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & : & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & : & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & : & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & : & b_n^{(1)} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ \vdots \\ L_n^{(1)} \end{matrix}$$

A la 1^{ère} étape : Si $a_{11}^{(1)} \neq 0$ (sinon on fait une permutation de lignes) on fait les affectations suivantes :

$$\begin{cases} L_1^{(2)} \longleftarrow L_1^{(1)} \\ L_i^{(2)} \longleftarrow L_i^{(1)} - \alpha_{i1} L_1^{(1)} \quad \text{où} \quad \alpha_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

On obtient donc

$$\left(A^{(2)} : b^{(2)} \right) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & : & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & : & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & : & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & : & b_n^{(2)} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \\ \vdots \\ L_n^{(2)} \end{matrix}$$

où

$$\begin{cases} a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)}, \quad 1 \leq j \leq n; \quad b_1^{(2)} = b_1^{(1)}; \\ a_{i1}^{(2)} = 0, \quad 2 \leq i \leq n; \\ a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \alpha_{i1} a_{1j}^{(1)}, \quad 2 \leq i, j \leq n; \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \alpha_{i1} b_1^{(1)}, \quad 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Remarque 3.4. Si on pose

$$E^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -\alpha_{21} & \ddots & & & \mathbf{0} \\ -\alpha_{31} & & 1 & & \\ \vdots & \mathbf{0} & & \ddots & \\ -\alpha_{n1} & & & & 1 \end{pmatrix}$$

on aura $A^{(2)} = E^{(1)} . A^{(1)}$.

A la $k^{\text{ième}}$ étape ($1 \leq k \leq n-1$) : Si $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ (sinon on fait une permutation de lignes) on fait les affectations suivantes :

$$\begin{cases} L_i^{(k+1)} \longleftarrow L_i^{(k)}, \quad 1 \leq i \leq k; \\ L_i^{(k+1)} \longleftarrow L_i^{(k)} - \alpha_{ik} L_k^{(k)} \quad \text{où} \quad \alpha_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad k+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

On obtient donc

$$\left(A^{(k+1)} \vdots b^{(k+1)} \right) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(k)} & \vdots & b_1^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(k)} & \vdots & b_2^{(k)} \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & a_{kk}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{kn}^{(k)} & \vdots & b_k^{(k)} \\ \vdots & & & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k+1)} & \vdots & b_{k+1}^{(k+1)} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & & & 0 & a_{n,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{n,n}^{(k+1)} & \vdots & b_n^{(k+1)} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(k+1)} \\ L_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ L_n^{(k+1)} \end{matrix}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)}, \quad 1 \leq j \leq n; \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)}, \end{cases} & 1 \leq i \leq k; \\ a_{ij}^{(k+1)} = 0, \quad 1 \leq j \leq k, \quad k+1 \leq i \leq n; \\ \begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \alpha_{ik} a_{kj}^{(k)}, \quad k+1 \leq j \leq n; \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \alpha_{ik} b_k^{(k)} \end{cases} & k+1 \leq i \leq n. \end{array} \right.$$

Remarque 3.5. Si on pose

$$E^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \mathbf{0} \\ & & -\alpha_{k+1,k} & & \\ \mathbf{0} & & -\alpha_{k+2,k} & \ddots & \\ & & \vdots & \mathbf{0} & \\ & & -\alpha_{nk} & & 1 \end{pmatrix}$$

on aura $A^{(k+1)} = E^{(k)} \cdot A^{(k)}$, $1 \leq k \leq n-1$.

En réitérant $(n - 1)$ fois l'opération on obtient :

$$AX = b \Leftrightarrow A^{(n)}X = b^{(n)}$$

avec

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad b^{(n)} = \begin{pmatrix} b_1^{(n)} \\ b_2^{(n)} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

$A^{(n)}$ étant une matrice triangulaire supérieure.

Remarque 3.6. 1. Pour $A^{(1)} = A$ on a trouvé que

$$A^{(k+1)} = E^{(k)} \cdot A^{(k)} = E^{(k)} \cdot E^{(k-1)} \cdot A^{(k-1)} = E^{(k)} \cdot E^{(k-1)} \cdots E^{(1)} \cdot A^{(1)}.$$

Alors

$$A^{(n)} = \underbrace{E^{(n-1)} \cdot E^{(n-2)} \cdots E^{(1)}}_{M} \cdot A = MA.$$

2. Les $a_{kk}^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$ sont appelés "pivots de la méthode de Gauss".

3. La méthode de Gauss permet de calculer $\det(A)$ par

$$\det(A) = (-1)^j \prod_{i=1}^n a_{ii}^{(i)} \quad \text{où } j \text{ est le nombre de permutations.}$$

4. Si à la $k^{\text{ième}}$ étape $a_{kk}^{(k)} = 0$, alors il existe p , $k + 1 \leq p \leq n$ tel que $a_{pk}^{(k)} \neq 0$, car

$$\det(A) = a_{11}^{(1)} \times a_{22}^{(2)} \times \cdots \times a_{k-1, k-1}^{(k-1)} \times \begin{vmatrix} a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

5. Au cours de la triangularisation, si l'on trouve que l'un des pivots $a_{kk}^{(k)} = 0$, on permute la ligne du pivot avec une ligne supérieure L_p , $k + 1 \leq p \leq n$ dont l'élément de la $k^{\text{ième}}$ colonne $a_{pk}^{(k)}$ est non nul.

6. La méthode de Gauss sans permutation de lignes s'appelle "Gauss ordinaire".

Exemple 3.1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \hookrightarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 5 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \hookrightarrow A^{(3)} = \tilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 0 & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Coût de la méthode d'élimination de Gauss ordinaire

Pour passer de $(A^{(k)}; b^{(k)})$ à $(A^{(k+1)}; b^{(k+1)})$ on utilise

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(1)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)}, & k + 1 \leq j \leq n; \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(1)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)} & k + 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Alors à chaque étape k , $1 \leq k \leq n-1$ on a $(n-k+1)(n-k)$ additions (soustractions), $(n-k+1)(n-k)$ multiplications et $(n-k)$ divisions, donc

$$\text{Coût total} = 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k+1)(n-k) + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) = \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n.$$

Rappel : $\sum_{i=1}^n k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$. D'où, le coût total de la méthode de Gauss (élimination+résolution d'un système triangulaire) est $\frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n + n^2 = O(\frac{2}{3}n^3)$ car pour n grand, n^2 est négligeable devant n^3 .

3.2.3 Méthode de la décomposition LU

Principe de la méthode :

1. Décomposition de la matrice A de façon à la mettre sous la forme $A = LU$ où L est une matrice triangulaire inférieure unitaire et U est une matrice triangulaire supérieure.
2. Résolution : Le système $AX = b$ devient

$$AX = b \iff L \underbrace{UX}_Y \iff \begin{cases} LY = b \\ UX = Y \end{cases}$$

donc la résolution du système $AX = b$ revient à la résolution de deux systèmes triangulaires.

Théorème 3.1. Soit A une matrice telle que les sous matrices principales $A_{[k]} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ de A soient inversibles pour tous $1 \leq k \leq n$, alors il existe une matrice $L = (l_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ triangulaire inférieure telle que $l_{ii} = 1$, $i = \overline{1, n}$ et une matrice triangulaire supérieure U telle que $A = LU$. De plus cette décomposition est unique.

Démonstration. Existence : Montrons que tous les pivots d'élimination de Gauss sont non nuls, c'est à dire $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ pour $1 \leq k \leq n-1$. On le démontre par récurrence.

Le premier pivot $a_{11}^{(1)}$ est forcément non nul car $a_{11}^{(1)} = \det(A_{[1]}) \neq 0$.

Supposons que $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ pour $1 \leq k \leq r-1$ et montrons que $a_{rr}^{(r)} \neq 0$.

On a $\det(A_{[r]}) = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \dots a_{r-1, r-1}^{(r-1)} a_{rr}^{(r)}$. Or d'une part, par hypothèse $\det(A_{[r]})$ est différent de zéro et d'autre part, par hypothèse de récurrence $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ pour $1 \leq k \leq r-1$. Donc $a_{rr}^{(r)}$ est aussi différent de zéro.

Unicité : Soit $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$, d'où $U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2 = D$.

Comme $U_1 U_2^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure et $L_1^{-1} L_2$ est une matrice triangulaire inférieure et D a des 1 sur la diagonale, alors $D = I_n$ ce qui implique que $U_1 = U_2$ et $L_1 = L_2$. \square

Détermination des matrices L et U

a) En utilisant l'algorithme d'élimination de Gauss ordinaire : Au premier pas d'élimination de Gauss, on trouve

$$A^{(2)} = E^{(1)} \cdot A^{(1)} \quad \text{où} \quad E^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\alpha_{21} & \ddots & & \mathbf{0} \\ -\alpha_{31} & & 1 & \\ \vdots & \mathbf{0} & & \ddots \\ -\alpha_{n1} & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Au deuxième pas, on trouve

$$A^{(3)} = E^{(2)}.A^{(2)} \quad \text{où} \quad E^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \mathbf{0} \\ \vdots & -\alpha_{32} & \ddots & & \\ \vdots & -\alpha_{42} & \mathbf{0} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & -\alpha_{n2} & & & 1 \end{pmatrix}$$

de la même manière au k -ième pas d'élimination, on obtient

$$A^{(k+1)} = E^{(k)}.A^{(k)} \quad \text{où} \quad E^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} \\ & & 1 & & \\ & & -\alpha_{k+1,k} & & \\ & \mathbf{0} & -\alpha_{k+2,k} & \ddots & \\ & & \vdots & \mathbf{0} & \\ & & -\alpha_{nk} & & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} A^{(n)} &= E^{(n-1)}.A^{(n-1)} \\ &= E^{(n-1)}.E^{(n-2)}.A^{(n-2)} \\ &= E^{(n-1)}.E^{(n-2)} \dots E^{(1)}.A. \end{aligned}$$

Posons $U = A^{(n)}$ et $L^{-1} = E^{(n-1)}.E^{(n-2)} \dots E^{(1)}$

alors $U = L^{-1}A$ d'où $A = LU$ où

$$\begin{aligned} L &= \left(E^{(n-1)}.E^{(n-2)} \dots E^{(2)}.E^{(1)} \right)^{-1} \\ &= \left(E^{(1)} \right)^{-1} \cdot \left(E^{(2)} \right)^{-1} \dots \left(E^{(n-1)} \right)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \alpha_{21} & 1 & & & \mathbf{0} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$U = A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \dots & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

b) En appliquant l'algorithme de la méthode :

En connaissant $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, on écrit l'égalité $A = LU$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \mathbf{0} \\ l_{31} & & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & \dots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & \dots & \dots & u_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

(U contient $\frac{n(n+1)}{2}$ éléments et L contient $\frac{n(n-1)}{2}$ éléments). Par identification on obtient un système linéaire de n^2 équations à n^2 inconnues. En résolvant le système obtenu dans des cas particuliers ($n = 2, 3, 4$), on constate que la détermination des éléments de L et U cherchés se fait suivant l'algorithme général :

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{ii} = 1, \quad 1 \leq i \leq n; \\ \left\{ \begin{array}{l} u_{1j} = a_{1j}, \quad 1 \leq j \leq n; \\ l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}, \quad 2 \leq i \leq n; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} u_{mj} = a_{mj} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{mk} \cdot u_{kj}, \quad m \leq j \leq n; \\ l_{im} = \left(a_{im} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{ik} \cdot u_{km} \right) / u_{mm}, \quad m+1 \leq i \leq n; \end{array} \right. \end{array} \right. \quad 2 \leq m \leq n.$$

Coût de la méthode

- Calcul de U : coût(\times)=coût($+$)= $\sum_{m=1}^n (m-1)(n-m+1) = O(\frac{1}{6}n^3)$
- Calcul de L : coût(\times)=coût($+$)= $\sum_{m=1}^{n-1} (m-1)(n-m) = O(\frac{1}{6}n^3)$
- et coût($/$)= $\sum_{m=1}^n (n-m) = \frac{n(n-1)}{2}$.

D'où, coût total = $O(\frac{2}{3}n^3)$ =coût de Gauss.

Utilité de la détermination LU

Calcul de déterminant Grâce à la factorisation LU , on peut calculer le déterminant d'une matrice carrée avec $O(\frac{2}{3}n^3)$ opérations, vu que

$$\det(A) = \det(L) \times \det(U) = \det(U) = \prod_{k=1}^n u_{kk}.$$

Résolution : Supposons qu'on veut résoudre le système $AX = b$. Décomposons A sous forme LU , alors $AX = b$ devient $(LU)X = b$ ou encore $L(UX) = b$. Posons $Y = UX$, on cherche alors Y tel que $LY = b$ est un système triangulaire inférieur qu'on résout par la méthode descendante. Y étant trouvé, on cherche X tel que $UX = Y$ est un système triangulaire supérieur qu'on résout par la méthode ascendante.

Coût total : coût(décomposition LU)+coût(résolution de deux systèmes triangulaires), c'est à dire, Coût total= $O(\frac{2}{3}n^3) + 2n^2 = O(\frac{2}{3}n^3)$.

Calcul de l'inverse d'une matrice : Soit A une matrice carrée inversible d'ordre n , notons par $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$ les colonnes de sa matrice inverse A^{-1} , i.e. $A^{-1} = (v^{(1)}, \dots, v^{(n)})$. La relation $AA^{-1} = I_n$ se traduit par les n systèmes linéaires suivants :

$$Av^{(k)} = e^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (3.3)$$

où $e^{(k)}$ est le vecteur colonne ayant toutes les composantes nulles sauf la k -ième composante qui est 1, $e^{(k)} = (0, \dots, 1, \dots, 0)^t$. Une fois connues les matrices L et U qui décomposent la matrice A , résoudre les n systèmes (3.3) gouvernés par la même matrice A .

Exemple 3.2. Soit le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

A l'aide de la décomposition LU de A :

1. Résoudre le système donné en déterminant les matrices L et U :

a) En utilisant l'algorithme d'élimination de Gauss ordinaire.

b) En appliquant l'algorithme de la méthode.

2. Calculer l'inverse de A.

3.2.4 Méthode de Cholesky

Dans le cas d'une matrice A symétrique définie positive, il est possible de résoudre le système $AX = b$ avec un nombre d'opérations égal presque à la moitié du nombre d'opérations utilisées dans la méthode de Gauss.

Définition 3.1. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite définie positive si et ssi $X^t A X > 0$, $\forall X \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Exemple 3.3. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2$. On a

$$X^t A X = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 + 2x_2)^2 + 4x_2^2 > 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

Définition 3.2. $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite définie positive si et ssi toute sous-matrice principale $A_{[k]} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$, $k = \overline{1, n}$ de A est de déterminant strictement positif.

Théorème 3.2. Si A est une matrice symétrique et définie positive alors, il existe (au moins) une matrice triangulaire inférieure R telle que $A = R R^t$.

De plus, si on impose que les éléments diagonaux de R soient tous positifs, alors cette décomposition est unique.

Démonstration. On a A définie positive assure l'existence de la décomposition LU de A où $L = (l_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une matrice triangulaire inférieure unitaire et $U = (u_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une matrice triangulaire supérieure (car toute sous-matrice principale $A_{[k]}$, $k = \overline{1, n}$ de A est de déterminant non nul).

Remarquons que $\det(A_{[k]}) = \prod_{j=1}^k u_{jj}$, $k = 1, 2, \dots, n$ ce qui implique que $u_{ii} > 0$, $i = \overline{1, n}$.

Soit D et $D^{\frac{1}{2}}$ les matrices diagonales définies par

$$D = \text{diag}(u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn}), \quad D^{\frac{1}{2}} = \text{diag}(\sqrt{u_{11}}, \sqrt{u_{22}}, \dots, \sqrt{u_{nn}})$$

alors $(D^{\frac{1}{2}})^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{\sqrt{u_{11}}}, \frac{1}{\sqrt{u_{22}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{u_{nn}}})$. D'une part, on a

$$A = LU = L I_n U = L D^{\frac{1}{2}} (D^{\frac{1}{2}})^{-1} U$$

Posons

$$\begin{aligned} R &= (r_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = LD^{\frac{1}{2}}, & \text{matrice triangulaire inférieure avec } r_{ii} = \sqrt{u_{ii}} \\ H &= (h_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = (D^{\frac{1}{2}})^{-1}U, & \text{matrice triangulaire supérieure avec } h_{ii} = \sqrt{u_{ii}}, \end{aligned}$$

alors

$$A = RH.$$

D'autre part, on a A est symétrique, alors

$$\begin{aligned} A &= A^t \\ \iff RH &= H^t R^t \\ \iff H(R^t)^{-1} &= (R)^{-1} H^t \quad (\text{multiplions les deux côtés à gauche par } (R)^{-1} \text{ et à droite par } (R^t)^{-1}) \\ \implies H(R^t)^{-1} &= I_n \text{ et } (R)^{-1} H^t = I_n \quad (H(R^t)^{-1} \text{ est M.T.S. et } (R)^{-1} H^t \text{ est M.T.I.}) \\ \implies H &= R^t. \end{aligned}$$

□

Algorithme de Cholesky²

Son principe est le suivant : on écrit la matrice A sous la forme RR^t où $R = (r_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $r_{ij} = 0$ si $j > i$, ensuite on identifie colonne après colonne on aura

Première colonne : ($j = 1$)

$$a_{11} = r_{11}^2 \implies r_{11} = \sqrt{a_{11}} \quad (\text{si on impose que } r_{11} > 0)$$

$$a_{i1} = r_{i1}r_{11} \implies r_{i1} = \frac{a_{i1}}{r_{11}}, \quad 2 \leq i \leq n.$$

Deuxième colonne : ($j = 2$)

$$a_{22} = r_{21}^2 + r_{22}^2 \implies r_{22} = \sqrt{a_{22} - r_{21}^2} \quad (\text{si on impose que } r_{22} > 0)$$

$$a_{i2} = r_{i1}r_{21} + r_{i2}r_{22} \implies r_{i2} = \frac{1}{r_{22}}(a_{i2} - r_{i1}r_{21}), \quad 3 \leq i \leq n.$$

Ainsi on a construit l'algorithme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11} = \sqrt{a_{11}}; \\ r_{i1} = \frac{a_{i1}}{r_{11}}, \quad 2 \leq i \leq n; \\ \text{pour } 2 \leq j \leq n \\ r_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} r_{jk}^2}; \\ r_{ij} = \frac{1}{r_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} r_{ik} r_{jk} \right), \quad j+1 \leq i \leq n. \end{array} \right.$$

Coût de la méthode

n extractions de racines carrées, $\sum_{j=1}^n (n-j) = \frac{n(n-1)}{2}$ (divisions),

$2 \sum_{j=1}^n (j-1)(n-j) = O(\frac{1}{3}n^3)$ (coût(\times) et coût($+$))

$\sum_{j=1}^n (j-1) = O(\frac{1}{2}n^2)$ (coût(\times) et coût($+$) dans les racines carrées).

Coût total = $O(\frac{1}{3}n^3) \approx$ la moitié de celui de Gauss.

2. André Louis Cholesky, français, 1875-1918

Conclusion :

On peut utiliser la décomposition RR^t d'une matrice A symétrique définie positive pour résoudre le système linéaire $AX = b$ ou pour inverser A , de la même manière que pour la décomposition (LU).

- Remarque 3.7.**
1. Si $A = RR^t$ où $R = (r_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors $\det(A) = (\det(R))^2 = \prod_{i=1}^n r_{ii}^2$.
 2. La décomposition $A = RR^t$ n'est pas unique si on n'impose pas que $r_{ii} > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.
 3. Pour une matrice définie positive on a : $r_{jj}^2 = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} r_{jk}^2 > 0$, donc si à une étape de calcul on trouve que $r_{jj}^2 < 0$, la matrice A n'est pas définie positive.

3.3 Méthodes itératives

Quand n est assez grand les méthodes directes ne sont plus envisageables vu le nombre très grand d'opérations à effectuer qui engendre la propagation des erreurs d'arrondi. On a alors recours aux méthodes itératives qui consistent à générer -à partir d'un vecteur initial $X^{(0)}$ choisi dans \mathbb{R}^n - une suite $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $X^{(n+1)} = F(X^{(n)})$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} X^{(n)} = X$; où $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un opérateur lié à la méthode.

Principe des méthodes itératives :

Ecrivons d'abord la matrice A sous la forme $A = M - N$ où M est inversible, alors

$$\begin{aligned} AX = b &\iff (M - N)X = b \\ &\iff MX = NX + b. \end{aligned}$$

Multiplions les deux côtés par M^{-1} , on aura

$$X = M^{-1}NX + M^{-1}b.$$

Le principe de toutes les méthodes itératives est le suivant :

- choisir un vecteur $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$,
- générer la suite $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $X^{(k+1)} = M^{-1}NX^{(k)} + M^{-1}b$,
- si la suite $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers X^* , alors X^* est la solution du système $AX = b$.

Remarque 3.8. 1. Le critère d'arrêt se fait, en général, sur l'erreur relative de deux itérés successifs $X^{(k)}$ et $X^{(k+1)}$, c'est à dire

$$\text{Test}\left(\frac{\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|}{\|X^{(k+1)}\|} < \epsilon\right)$$

où ϵ choisi petit, ou sur l'erreur absolue si $\|X^{(k+1)}\|$ est très petite.

2. La méthode itérative est dite convergente si : $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^n, X^{(k)} \rightarrow X^*$ quand $k \rightarrow +\infty$ où X^* est la solution du système $AX = b$.

3.3.1 Matrice d'itération et les conditions de convergence

On appelle, pour M et N choisies, matrice d'itération "la matrice $B = M^{-1}N$."

Condition nécessaire de convergence

Notons par $E^{(k)} = X^{(k)} - X^*$ le vecteur erreur à l'étape k ($k \in \mathbb{N}$), on a

$$X^* = B X^* + M^{-1}b \quad (1)$$

$$X^{(k)} = B X^{(k-1)} + M^{-1}b, \quad (2)$$

en soustrayant (1) de (2), on aura

$$X^{(k)} - X^* = B(X^{(k-1)} - X^*) = B E^{(k-1)}.$$

Alors

$$E^{(k)} = B E^{(k-1)} = B^2 E^{(k-2)} = \dots = B^k E^{(0)} \quad \text{où } E^{(0)} = X^{(0)} - X^*,$$

ou encore

$$X^{(k)} - X^* = B^k (X^{(0)} - X^*).$$

La méthode converge si $\forall X^{(0)}, \lim_{k \rightarrow +\infty} X^{(k)} = X^*$, ce qui est vraie si

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0 \quad (0 \text{ au sens matriciel}).$$

Condition nécessaire et suffisante de convergence

Soit $\rho(B) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ valeur propre de } B\}$ le rayon spectral de B . On a le théorème suivant :

Théorème 3.3. *La suite $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ définie par*

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ quelconque} \\ X^{(k+1)} = B X^{(k)} + M^{-1}b, \end{cases}$$

converge vers X^ si et ssi $\rho(B) < 1$.*

Condition suffisante de convergence**Rappel**

1. Soit $X = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, les normes définies par :

$$\begin{aligned} - \|X\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i| \\ - \|X\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ - \|X\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \end{aligned}$$

sont équivalentes.

2. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, les normes définies par :

$$\begin{aligned} - \|A\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \\ - \|A\|_2 &= \sqrt{\rho(A^t A)} \\ - \|A\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \end{aligned}$$

sont équivalentes.

Lemme 3.1. (Relation entre $\rho(B)$ et $\|B\|$)

$$\rho(B) \leq \|B\|_i \quad (i = 1 \vee 2 \vee \infty).$$

Démonstration. Soit λ une valeur propre de B , alors $\exists X \in (\mathbb{R}^*)^n : BX = \lambda X$ et donc

$$\|BX\|_i = \|\lambda X\|_i \implies |\lambda| \|X\|_i \leq \|B\|_i \|X\|_i, \quad X \in (\mathbb{R}^*)^n \quad (\|BX\|_i \leq \|B\|_i \|X\|_i).$$

D'où, $|\lambda| \leq \|B\|_i \implies \rho(B) \leq \|B\|_i, \quad i = 1 \vee 2 \vee \infty.$ □

D'après le lemme 3.1, on tire que l'existence d'une norme $\|\cdot\|_i$, ($i = 1 \vee 2 \vee \infty$) de B qui vérifie $\|B\|_i < 1$ est une condition suffisante pour la convergence de la méthode itérative.

3.3.2 Principales méthodes itératives

On considère la décomposition suivante de la matrice A

$$A = D - E - F = \begin{pmatrix} & & -F \\ & D & \\ -E & & \end{pmatrix}$$

où,

$$\begin{cases} D & : \text{ la diagonale de } A, \\ -E & : \text{ la partie au dessous de la diagonale de } A, \\ -F & : \text{ la partie au dessus de la diagonale de } A. \end{cases}$$

Exemple 3.4. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ alors

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose que $\forall i = 1, 2, \dots, n, a_{ii} \neq 0_{\mathbb{R}}$ (on peut s'y ramener si A est inversible).

i) **Méthode de Jacobi** : $M = D, \quad N = E + F$

ii) **Méthode de Gauss-Seidel** : $M = D - E, \quad N = F$

iii) **Méthode de relaxation** : $M = (\frac{1}{\omega})D - E, \quad N = (\frac{1}{\omega} - 1)D + F, \quad \omega \in \mathbb{R}^*.$

Remarque 3.9.

1. Si $\omega = 1$, la méthode de relaxation coïncide avec celle de Gauss-Seidel.
2. La matrice M est inversible, car elle possède toujours les a_{ii} sur la diagonale.
3. la méthode de relaxation est une variante qui généralise la méthode de Gauss-Seidel. L'introduction du paramètre ω vise à accélérer la convergence de cette dernière.

Présentation des algorithmes

On va, dans ce qui suit, expliciter les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel, et cela sur un système linéaire à trois équations ($n = 3$).

Soit donc $AX = b$ où $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^3$

$$AX = b \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & (3) \end{cases}$$

les $(a_{ii})_{i=1,2,\dots,n}$ étant supposés non nuls ; tirons x_1 de (1), x_2 de (2) et x_3 de (3), on obtient

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 + a_{13}x_3)/a_{11} = f(x_2, x_3) \quad (4)$$

$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 + a_{23}x_3)/a_{22} = g(x_1, x_3) \quad (5)$$

$$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 + a_{32}x_2)/a_{33} = h(x_1, x_2) \quad (6)$$

soit $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^t \in \mathbb{R}^3$ quelconque.

La méthode de Jacobi revient au processus itératif suivant :

1^{ère} étape :

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= f(x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \\ x_2^{(1)} &= g(x_1^{(0)}, x_3^{(0)}) \\ x_3^{(1)} &= h(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \end{aligned} \longrightarrow X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$$

2^{ième} étape :

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= f(x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) \\ x_2^{(2)} &= g(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) \\ x_3^{(2)} &= h(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \end{aligned} \longrightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}$$

et ainsi de suite, jusqu'à satisfaction du critère d'arrêt. (Il est évident qu'on ne peut pas calculer le coût de la méthode).

La méthode de Gauss-Seidel³ revient au processus itératif suivant :

1^{ère} étape :

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= f(x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \equiv \text{Jacobi} \\ x_2^{(1)} &= g(x_1^{(1)}, x_3^{(0)}) \\ x_3^{(1)} &= h(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \end{aligned} \longrightarrow X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$$

2^{ième} étape :

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= f(x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) \\ x_2^{(2)} &= g(x_1^{(2)}, x_3^{(1)}) \\ x_3^{(2)} &= h(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \end{aligned} \longrightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}$$

(c'est à dire toutes les composantes calculées $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})$ sont utilisées pour calculer x_i), et ainsi de suite, jusqu'à satisfaction du critère d'arrêt.

Généralisation

Soit $AX = b$ un système linéaire d'ordre n où $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Les équations (4), (5) et (6) précédentes se généralisent comme suit :

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j \right) / a_{ii}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Etapas principales de la méthode de Jacobi :

1. Etant données $A, b, X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^t, \epsilon$ (la précision) et/ou $KMax$ (le nombre maximal d'itérations).

2. $x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$

A répéter pour $k = 0, \dots, KMax$.

Si

$$\frac{\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|}{\|X^{(k+1)}\|} < \epsilon$$

arrêter les itérations, et $X^{(k+1)}$ est une solution approchée de X solution du système donné avec une précision relative ϵ .

Etapas principales de la méthode de Gauss-Seidel :

1. Etant données $A, b, X^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^t, \epsilon$ et/ou $KMax$.

2. $x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$

A répéter pour $k = 0, \dots, KMax$.

Si

$$\frac{\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|}{\|X^{(k+1)}\|} < \epsilon$$

arrêter les itérations, et $X^{(k+1)}$ est une solution approchée de X solution du système donné avec une précision relative ϵ .

- Remarque 3.10.** 1. S'il existe $i_0 \in [1, n]$ tel que $a_{i_0 i_0} = 0$, on procède à une permutation de ligne sur A (et sur b).
2. En général, la convergence de l'une de ces méthodes n'implique pas la convergence de l'autre.
3. Plus que $\rho(B) \ll 1$, plus que la convergence du processus itératif

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ donné} \\ X^{(k+1)} = BX^{(k)} + C \end{cases}$$

vers la solution exacte du système $AX = b$ est plus rapide.

Exemple 3.5. Soient les quatre systèmes linéaires $A_i X = b_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} & A_2 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ A_3 &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix} & A_4 &= \begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Etudier la convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel appliquées à chaque système, pour tout choix de $X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, en utilisant le rayon spectral des matrices d'itérations. Conclure.

Réponse On trouve les résultats suivants :

1.

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad G_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

avec $\rho(J_1) = 0 < 1$, $\rho(G_1) = 2 > 1$, d'où la méthode de Jacobi converge $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, alors que celle de Gauss-Seidel ne converge pas $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

2.

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

avec $\rho(J_2) = 1,118 > 1$, $\rho(G_2) = \frac{1}{2} < 1$, d'où la méthode de Gauss-Seidel converge $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, alors que celle de Jacobi ne converge pas $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

3.

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad G_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

avec $\rho(J_3) = 0,44 < 1$, $\rho(G_3) = 0,018 < 1$, d'où les deux méthodes convergent $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, mais comme $\rho(G_3) < \rho(J_3)$ alors, la méthode qui converge plus rapidement est celle de Gauss-Seidel.

4.

$$J_4 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{9}{7} \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{7}{8} & \frac{3}{8} & 0 \end{pmatrix} \quad G_4 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{9}{7} \\ 0 & \frac{24}{35} & \frac{64}{35} \\ 0 & -\frac{69}{140} & -\frac{123}{280} \end{pmatrix}$$

avec $\rho(J_4) = 0,64 < 1$, $\rho(G_4) = 0,77 < 1$, d'où les deux méthodes convergent $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, mais comme $\rho(J_4) < \rho(G_4)$ alors, la méthode qui converge plus rapidement est celle de Jacobi.

D'autres conditions suffisantes de convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel

Soit le système linéaire $AX = b$ où $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, J la matrice d'itération de Jacobi définie par :

$$J = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{où} \quad \alpha_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & \text{si } i \neq j; \\ 0, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

On a vu qu'une condition suffisante pour que le processus itératif converge (vers la solution du système (S)) est que $\|J\|_N$ où N est l'une des trois normes matricielles présentées.

Prenons la norme $\|\cdot\|_\infty$: $\|J\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \right)$, alors

$$\|J\|_\infty < 1 \iff \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

et pour i fixé, on a

$$(|\alpha_{i1}| + |\alpha_{i2}| + \dots + |\alpha_{in}|) < 1$$

ou encore

$$\frac{1}{a_{ii}} (|a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{in}|) < 1 \implies \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

auquel cas on dit que la matrice A est à diagonale dominante stricte.

Remarque 3.11. *On aboutit à la même conclusion pour la méthode de Gauss-Seidel (exercice).*

D'où le résultat suivant :

Théorème 3.4. *Pour que les processus itératifs de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent ($\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$), il suffit que la matrice A du système $AX = b$ soit à diagonale dominante stricte (D.D.S).*

Proposition 3.1. *Si A est symétrique définie positive, alors le processus itératif de Gauss-Seidel converge $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.*

Méthode de relaxation

La matrice d'itération est dans ce cas $B = M^{-1}N$ où $M = (\frac{1}{\omega})D - E$, $N = (\frac{1-\omega}{\omega})D + F$, avec ω un paramètre dans \mathbb{R}^* .

On remarque que si $\omega = 1$, cette méthode coïncide avec celle de Gauss-seidel; on l'utilise pour accélérer la convergence de Gauss-Seidel :

$$\begin{aligned} \omega > 1 & \quad \text{procédé de sur-relaxation,} \\ \omega = 1 & \quad \text{méthode de Gauss-Seidel,} \\ \omega < 1 & \quad \text{procédé de sous-relaxation.} \end{aligned}$$

En écrivant le processus itératif :

$$X^{(k+1)} = (M^{-1}N)X^{(k)} + M^{-1}b,$$

alors la méthode de relaxation consiste en le schéma suivant :

lors du passage de $X^{(k)}$ à $X^{(k+1)}$ on ne retient pas $X^{(k+1)}$ pour la suite, mais $\omega X^{(k+1)} + (1 - \omega)X^{(k)}$. Autrement dit

$$X^{(k+1)} \longleftarrow X^{(k)} + \omega \underbrace{(X^{(k+1)} - X^{(k)})}_{G-S},$$

et en injectant cette expression dans l'algorithme de Gauss-Seidel, on trouve l'algorithme suivant :

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Convergence de la méthode de relaxation

Théorème 3.5. *(conditions sur le paramètre ω)*

Cas d'une matrice A quelconque (mais inversible), *une condition nécessaire pour que la méthode de relaxation converge $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ est que $\omega \in]0, 2[$.*

Si A est à diagonale dominante stricte, *alors la condition suffisante de convergence est que $\omega \in]0, 1[$.*

Si A est symétrique définie positive, *alors la condition nécessaire et suffisante de convergence est que $\omega \in]0, 2[$.*

3.4 Exercices

Série de T.D. N°2

Résolution numérique des systèmes linéaires

Exercice 3.1. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2(1 - \alpha) & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. *Sans calculer les matrices d'itération, donner une condition suffisante sur le paramètre α pour que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel soient convergentes.*
2. *Calculer les matrices d'itération B_J et B_{GS} des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel, respectivement. Etablir pour quelles valeurs de α les méthodes sont convergentes.*
3. *En déduire quel est le rapport entre les vitesses de convergence.*