Université A/ Mira de Béjaia
Faculté des sciences exactes
Département de Mathématiques

Année 2018-2019
$2^{\text{ème}}$ année L.M.

Corrigé d'examen d'analyse numérique I

Exercice n° 1. Soient les points $(-1,\alpha),\ (0,\beta)$ et $(1,\alpha)$ où α et β sont de réels. Posons

$$x_0=-1,\ x_1=0,\ x_2=1,\ y_0=\alpha,\ y_1=\beta,\ y_2=\alpha.$$

1. **a)** Sous la forme de Largange le polynôme P s'écrit :

$$P(x)=y_0L_0(x)+y_1L_1(x)+y_2L_2(x),$$

où

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \tfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \tfrac{x(x-1)}{(-1)(-2)} = \tfrac{1}{2}x(x-1),\\ L_1(x) &= \tfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \tfrac{(x+1)(x-1)}{(1)(-1)} = -(x+1)(x-1),\\ L_2(x) &= \tfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \tfrac{x(x+1)}{(2)(1)} = \tfrac{1}{2}x(x+1). \end{aligned}$$

Donc

$$P(x)=\frac{1}{2}\alpha x(x-1)-\beta(x+1)(x-1)+\frac{1}{2}\alpha x(x+1)=(\alpha-\beta)x^2+\beta.$$

b) Si $\alpha=\beta$, $P(x)=\beta$, qui est un polynôme de degré 0.

c) Pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $P(-x)=P(x)$ donc P est pair. Le polynôme P ne peut pas être de degré 1 car un polynôme de degré 1 est de la forme a_0+a_1x qui ne peut pas être pair.

2. Dans $\mathbb{P}_1$, le polynôme Q qui approxime les trois points $(-1,\alpha),\ (0,\beta)$ et $(1,\alpha)$ au sens des moindres carrés s'écrit :

$$Q(x)=a+bx,$$

où les coefficients a et b vérifient le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{2}1 & \sum\limits_{i=0}^{2}x_i \\ \sum\limits_{i=0}^{2}x_i & \sum\limits_{i=0}^{2}x_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{2}y_i \\ \sum\limits_{i=0}^{2}x_i\,y_i\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix} 3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\alpha+\beta\\ 0\end{pmatrix}.$$

La résolution du système obtenu nous donne $a=\frac{1}{3}(2\alpha+\beta)$ et $b=0$. Donc

$$Q(x)=\frac{1}{3}(2\alpha+\beta).$$

Exercice n° 2. On considère la formule d'intégration numérique (M) donnée par :

$$\textbf{(M)}\qquad \int_0^1 f(x)\,dx\approx V(f)=\frac{1}{8}\big(f(0)+3f(\frac{1}{3})+3f(\frac{2}{3})+f(1)\big).$$

1. **a)** Déterminons p le degré de précision de la formule (M). On a

$$\begin{cases} \int_0^1 dx = 1 & \text{et} \quad V(1) = 1 \\ \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} & \text{et} \quad V(x) = \frac{1}{2} \\ \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} & \text{et} \quad V(x^2) = \frac{1}{3} \\ \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4} & \text{et} \quad V(x^3) = \frac{1}{4} \\ \int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5} & \text{et} \quad V(x^4) = \frac{11}{54} \neq \frac{1}{5}. \end{cases}$$

   Donc $p = 3$.

   b) Soit $R(f) = \int_0^1 f(x)\,dx - V(f) = kf^{(4)}(\xi),\ \ \xi \in [0,1]$. Déterminons la constante k.
   Pour $f(x) = x^4$ on trouve $f^{(4)}(x) = 4! = 24$. Donc
   d'une part, on a $R(x^4) = \int_0^1 x^4\,dx - V(x^4) = \frac{1}{5} - \frac{11}{54} = -\frac{1}{270}$,
   et d'autre part, on a $R(x^4) = 24k$.
   Ce qui donne

$$24k = -\frac{1}{270} \Longrightarrow k = -\frac{1}{6480}.$$

2. On en déduit la formule d'intégration approchée sur un intervalle $[a,b]$.
   Posons $x = (b-a)y + a$, alors

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= (b-a)\int_0^1 f((b-a)y+a)\,dx \\ &= (b-a)\int_0^1 g(y)\,dy \quad (\text{ posons } g(y) = f((b-a)y+a) \\ &\approx \tfrac{b-a}{8}(g(0) + 3g(\tfrac{1}{3}) + 3g(\tfrac{2}{3}) + g(1)) \\ &= \tfrac{b-a}{8}\left(f(a) + 3f(\tfrac{b+2a}{3}) + 3f(\tfrac{a+2b}{3}) + f(b)\right). \end{aligned}$$

3. On divise l'intervalle $[a,b]$ en $n = 3m,\ m \in \mathbb{N}^*$ parties égales de longueur $h = \frac{b-a}{n}$.
   Généralisons la fomule obtenue dans la question précédente. Posons

$$x_j = a + jh \ \text{ et } \ y_j = f(x_j),\ \ j = 0, ..., n.$$

   On a

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_{3m}} f(x)\,dx \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_{3i}}^{x_{3i+3}} f(x)\,dx \\ &\approx \tfrac{x_{3i+3}-x_{3i}}{8}\left(\sum_{i=0}^{m-1}(f(x_{3i}) + 3f(\tfrac{x_{3i+3}+2x_{3i}}{3}) + 3f(\tfrac{2x_{3i+3}+x_{3i}}{3}) + f(x_{3i+3}))\right) \\ &= \tfrac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) + \tfrac{3h}{8}(y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6) \\ &\quad +... + \tfrac{3h}{8}(y_{3m-3} + 3y_{3m-2} + 3y_{3m-1} + y_{3m}) \\ &= \tfrac{3h}{8}[y_0 + y_{3m=n} + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + ... + y_{3m-2} + y_{3m-1}) \\ &\quad +2(y_3 + y_6 + ... + y_{3m-3})] \\ &= \tfrac{3}{8}h\left(f(x_0) + f(x_n) + 3\sum_{i=0}^{m-1}(y_{3i+1} + y_{3i+2}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_{3i}\right). \end{aligned}$$

4. Applications : Soit l'intégrale : $I_1 = \int_{-1}^{1} x^2\,dx$. Ici $f(x) = x^2,\ [a,b] = [-1,1]$.

a) $n = 6 \Longrightarrow h = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Posons

$$x_0 = -1,\ x_1 = -\frac{2}{3},\ x_2 = -\frac{1}{3},\ x_3 = 0,\ x_4 = \frac{1}{3},\ x_5 = \frac{2}{3},\ x_6 = 1, \text{ et } y_i = x_i^2,\ i = 0, ..., 1.$$

i) Par la formule des trapèzes :

$$\begin{aligned} I_1 \approx I_T &= \tfrac{h}{2}\left(y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) + y_6\right) \\ &= \tfrac{1}{6}\left(1 + 2(\tfrac{4}{9} + \tfrac{1}{9} + 0 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9}) + 1\right) \\ &= \tfrac{38}{54}. \end{aligned}$$

ii) Par la formule de Simpson : $I_S = I_1 = \frac{2}{3}$,
car $f \in \mathbb{P}_2$ et la formule de Simpson est de degré de précision $p = 3$.

iii) Par la formule obtenue dans la question (3) :$I_M = I_1 = \frac{2}{3}$,
car $f \in \mathbb{P}_2$ et la formule (M) est de degré de précision $p = 3$.

b) Les formules (M) et de Simpson sont plus précises que celle des trapèzes car elles sont de degré de précision $p = 3$ et celle des trapèzes est de degré $p = 1$.

Soit l'intégrale : $I_2 = \int_0^6 e^x\,dx$. Ici $f(x) = e^x,\ [a,b] = [0,6]$.

a) $n = 6 \Longrightarrow h = \frac{6}{6} = 1$. Posons

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5,\ x_6 = 6, \text{ et } y_i = e^{x_i},\ i = 0, ..., 1.$$

i) Par la formule des trapèzes :

$$\begin{aligned} I_2 \approx I_T &= \tfrac{h}{2}\left(y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) + y_6\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(1 + 2(e + e^2 + e^3 + e^4 + e^5) + e^6\right) \\ &\approx 435,42. \end{aligned}$$

ii) Par la formule de Simpson :

$$\begin{aligned} I_2 \approx I_T &= \tfrac{h}{3}\left(y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4) + y_6\right) \\ &= \tfrac{1}{3}\left(1 + 4(e + e^3 + e^5) + 2(e^2 + e^4) + e^6\right) \\ &\approx 404,42. \end{aligned}$$

iii) Par la formule obtenue dans la question (3) :

$$\begin{aligned} I_2 \approx I_T &= \tfrac{3h}{8}\left(y_0 + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5) + 2(y_3 + y_4) + y_6\right) \\ &= \tfrac{3}{8}\left(1 + 3(e + e^2 + e^4 + e^5) + 2e^3 + e^6\right) \\ &\approx 406,48. \end{aligned}$$

b) On a $I_2 = \int_0^6 e^x\,dx = e^6 - 1$. Donc

$$E_T = |I_2 - I_T| = 32,99$$

$$E_S = |I_2 - I_S| = 1,99$$

$$E_M = |I_2 - I_M| = 4,05.$$

Remarquons que $E_S < E_M < E_T$. Donc la méthode la plus précise est celle de Simpson et la plus moins précise est celle des trapèzes.