Université A/ Mira de Béjaia Année 2018-2019
Département de Mathématiques Durée 1h30
2ème année L.M.

Examen d'Analyse Numérique I

Exercice n° 1. (09 points).
Soient les points $(-1,\alpha),\ (0,\beta)$ et $(1,\alpha)$ où α et β sont de réels.

1. **a)** Déterminer le polynôme de Lagrange P qui interpole les trois points $(-1,\alpha),\ (0,\beta)$ et $(1,\alpha)$.

   b) Si $\alpha=\beta$, donner le degré du polynôme P.

   c) Montrer que P est pair. Peut-on avoir P de degré 1 ?

2. Déterminer, dans $\mathbb{P}_1$, le polynôme Q qui approxime les trois points $(-1,\alpha),\ (0,\beta)$ et $(1,\alpha)$ au sens des moindres carrés.

$\mathbb{P}_1$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 1

Exercice n° 2. (11 points).
On considère la formule d'intégration numérique (M) donnée par :

$$\textbf{(M)} \qquad \int_0^1 f(x)\,dx \approx V(f)=\frac{1}{8}(f(0)+3f(\frac{1}{3})+3f(\frac{2}{3})+f(1)).$$

1. **a)** Déterminer p le degré de précision de la formule (M).

   b) Sachant que l'erreur d'approximation de la formule (M) est de la forme :

   $$R(f)=kf^{(p+1)}(\xi),\quad \xi\in[0,1]$$

   déterminer la constante k.

2. En déduire de la formule (M) une formule d'intégration numérique sur l'intervalle $[a,b]$.
3. On divise l'intervalle $[a,b]$ en $n=3m,\ m\in\mathbb{N}^*$ parties égales de longueur $h=\frac{b-a}{n}$.
   Généraliser la fomule obtenue dans la question précédente.
4. Applications : Soit les deux intégrales :

   $$I_1=\int_{-1}^{1} x^2\,dx,\quad I_2=\int_0^6 e^x\,dx.$$

   a) Calculer les intégrales I_1 et I_2 pour $n=6$:

   i) par la formule des trapèzes,

   ii) par la formule de Simpson,

   iii) par la formule obtenue dans la question (3).

   b) Comparer les résultas obtenus dans chaque cas.