Université Abderrahmane Mira de Béjaia

Faculté des sciences exactes

Département de mathématiques

Géométrie

Cours, $2^{ème}$ année Licence, Mathématiques

Nadia MOHDEB

Chapitre 1

Courbes paramétrées-Généralités

1.1 Quelques définitions

Définition 1.1. *Soit* $n \in \{2, 3\}$. *On appelle courbe paramétrée de classe* C^k *d'un espace affine* E *(on se limite à* $\mathbb{R}^n$*) une application de classe* C^k, $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, *où* I *est un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$.

L'ensemble

$$C = \gamma(I) = \{\gamma(t) \ ; t \in I\}$$

est dit support géométrique de γ.

On dit que C *est une courbe géométrique et que* γ *est une paramétrisation de* C.

Si $n = 2$ *on dit que la courbe est plane.*

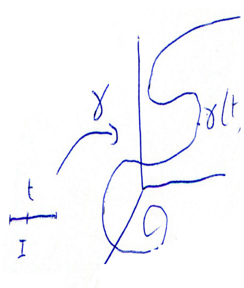

FIGURE 1.1 – une courbe paaramétrée.

Remarque : Une courbe paramétrique indique plus d'information qu'une courbe géométrique. En effet,

Quand t parcourt I, le point $\gamma(t)$ parcourt C. Ainsi, la courbe paramétrée donne en plus du support géométrique, une façon de le parcourir.

Exemple 1 : (réel)

Pour aller d'un point A à un point B, on fait correspondre une courbe géométrique C.

Pour parcourir ce chemin, on prend une voiture puis on ira à pieds. On suppose qu'on démarre à l'instant t_0 et on arrive à l'instant t_1 et t_2 ($t_2 > t_1$) respectivement.

On définit ainsi deux paramétrisations

$$\gamma_1 : [t_0, t_1] \to C \subset \mathbb{R}^3$$

et

$$\gamma_2 : [t_0, t_2] \to C \subset \mathbb{R}^3.$$

Les courbes paramétrées γ_1 et γ_2 sont différentes pourtant définissent le même support géométrique C.

Exemple 2 : (méthématique)

Soit

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0,1] &\to C \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma_1(t) = \left(at, a\sqrt{1-t^2}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_2 : [0,1] &\to C \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma_2(t) = (a\cos(t), a\sin(t)) \end{aligned}$$

Notons $x_1(t)$ et $y_1(t)$ les deux composantes de $\gamma_1(t)$ et $x_2(t)$ et $y_2(t)$ les deux composantes de $\gamma_2(t)$. On a

$$(x_1(t))^2 + (y_1(t))^2 = (x_2(t))^2 + (y_2(t))^2 = a^2$$

Donc $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t) \in c(0,a)$ (cercle de centre 0 et de rayon a). Dans ce cas, C est le quard du cercle du premier quadrant du plan.

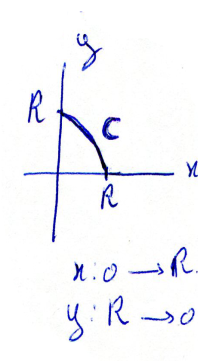

FIGURE 1.2 – La courbe géométrique C

On a ainsi la remarque suivante :

Remarque : Une courbe géométrique peut avoir plusieurs paramétrisations.

1.2 Reparamétrisation :

Définition : Soit U et V deux ensembles ouvarts de $\mathbb{R}^n$.

Une application

$$f : U \to V$$

est dite un C^1-difféomorphisme si :

- l'application f est une bijection de U dans V.
- les applications f et f^{-1} sont de classe C^1.

Définition-Proposition : Soit

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$$

une courbe paramétrée de classe C^1.

Soit

$$\varphi : J \to I$$

un difféomorphisme, où J est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Alors,

$$\gamma \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^n$$

est une courbe paramétrée qui a le même support géométrique que γ.

On dit alors que φ est un changement de variables admissible.

On dit aussi que $\gamma \circ \varphi$ est une reparamétrisation de γ.

Preuve :

On a

$$J \overset{\varphi}{\to} I \overset{\gamma}{\to} \mathbb{R}^n$$

avec

$$\gamma \circ \varphi (J) = \gamma (\varphi (J)) = \gamma (I)$$

(car φ est bijective). D'où $\gamma \circ \varphi$ et γ ont même support.

1.3 Courbes régulières, espace tangent

Définition : Un vecteur v_0 est dit tangent à la courbe γ en $\gamma (t_0)$ si

$$\exists \lambda (t) \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon (t) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{\gamma (t_0) \gamma (t)} = \lambda (t) v_0 + \lambda (t) \varepsilon (t)$$

avec

$$\lim_{t \to t_0} \varepsilon (t) = (0, 0)$$

Proposition : Soit

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$$

une courbe paramétrée de classe C^1. Si

$$\gamma'(t_0) \neq 0$$

alors $\gamma'(t_0)$ est un vecteur tangent à la courbe γ au point $\gamma(t_0)$.

Preuve : On a

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t)$$

avec

$$\lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = (0,0)$$

FIGURE 1.3 – Courbe régulière.

Définition : Une courbe paramétrée

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$$

de classe C^1 est dite régulière si

$$\forall t \in I,\ \gamma'(t_0) \neq 0$$

1.4 Longueur d'une courbe

Définition : Soit

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

une courbe paramétrée. La longueur de γ est donnée par

$$l(\gamma) = \sup_{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})} \right\|$$

Si de plus $l(\gamma)$ est fini, γ est dite rectifiable.

Théorème :

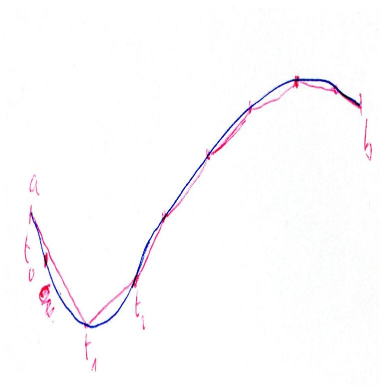

FIGURE 1.4 – Longueur d'une courbe paaramétrée.

Soit

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

une courbe paramétrée de classe C^1. Alors γ est rectifiable et

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$

Preuve :

On montre d'abord que

$$l(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$

On a

$$\|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| = \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) \, dt \right\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\| \, dt, \forall i \in \{0, ..., n-1\}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{\gamma(t_i)\,\gamma(t_{i+1})} \right\| \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$

Donc

$$l(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt \text{ (après passage au sup)} \tag{1.1}$$

Pour montrer l'égalité, considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi : [a, b] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \varphi(t) = l(\gamma/[a, t]) \end{aligned}$$

où $\gamma/[a,t]$ est la courbe γ restreinte à l'intervalle $[a,t]$. Soit $h>0$ tel que

$$(t+h)\in[a,b]$$

(De même si $h<0$). On a

$$\left\|\overrightarrow{\gamma(t)\,\gamma(t+h)}\right\|\leq\varphi(t+h)-\varphi(t)=l\left(\gamma/[a,t+h]\right)-l\left(\gamma/[a,t]\right)$$

puisque la longueur de la courbe entre t et $t+h$ est plus longue que la longueur du segment $[\gamma(t),\gamma(t+h)]$. Donc,

$$\frac{1}{h}\left\|\overrightarrow{\gamma(t)\,\gamma(t+h)}\right\|\leq\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}$$

Or

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\|\overrightarrow{\gamma(t)\,\gamma(t+h)}\right\|=\left\|\gamma'(t)\right\|$$

et d'après (1.1),

$$\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}\leq\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\left\|\gamma'(s)\right\|ds$$

Comme on a aussi,

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\left\|\gamma'(s)\right\|ds=\left\|\gamma'(t)\right\|$$

On déduit que φ est dérivable en t et que

$$\varphi'(t)=\left\|\gamma'(t)\right\|$$

Ainsi,

$$l(\gamma)=\varphi(t)=\int_a^t\varphi'(s)\,ds=\int_a^t\left\|\gamma'(s)\right\|ds$$

Exemple :

Soit

$$\begin{aligned}\gamma:[0,2\pi]&\to\mathbb{R}^3\\ t&\mapsto\gamma(t)=(r\cos(t),r\sin(t),at)\end{aligned}$$

On a

$$l(\gamma)=\int_0^{2\pi}\left\|\gamma'(s)\right\|ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+a^2}ds=2\pi\sqrt{r^2+a^2}$$

Si $a=0$, on aura

$$l(\gamma)=2\pi r$$

et on retrouve ainsi la longueur du cercle $c(0,r)$ (Fig.1.5).

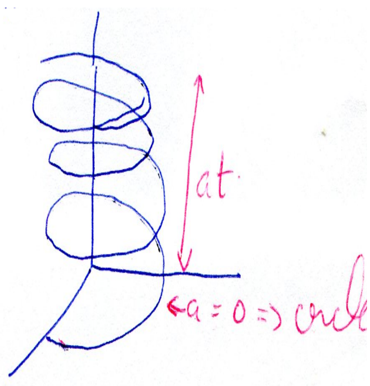

FIGURE 1.5 – Longueur d'une courbe paaramétrée.

1.5 Paramétrisation par abscisse curviligne

Il est possible de paramétrer une courbe par sa longueur. Si la longueur d'un trajet est l, on peut définir la courbe paramétrée

$$\gamma : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

qui à chaque longueur $s \in [0, l]$, associe le point $\gamma(s)$ sur la courbe Ccorrespondante qui est à une distance s du point de départ.

Définition : Soit

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

une courbe paramétrée de classe C^1 et $t_0 \in I$. L'abscisse curviligne à partir du point de paramètre t_0 est la fonction

$$\begin{aligned} s_{t_0} &: I \rightarrow \mathbb{R} \\ & t \mapsto s_{t_0}(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| \, du \end{aligned}$$

Géométriquement parlant, s_{t_0} est la longueur de la courbe $C = \gamma(t)$ entre les points $\gamma(t_0)$ et $\gamma(t)$.

Définition : Une paramétrisation

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

d'une courbe géométrique est dite normale our paramétré par abscicsse curviligne si

$$\forall [t_1, t_2] \subset I, l(\gamma / [t_1, t_2]) = t_2 - t_1$$

(on aura donc $\|\gamma'(t)\| = 1$).

Théorème : Soit

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$$

une courbe paramétrée régulière de classeC^1 et soit $t_0 \in I$. Alors

$$s_{t_0}^{-1} : J \to I$$

est un changement de variable admissible. Autrement dit

$$\gamma_1 = \gamma \circ s_{t_0}^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$$

est une paramétrisation normale qui a le même support géométrique que γ.

Preuve :

On a

$$s'_{t_0}(t) = \|\gamma'(t)\|$$

Puisque γ est régulière, alors $\gamma' \neq 0$ et donc $s'_{t_0} \neq 0$.

Comme s_{t_0} est bijective de I sur $s_{t_0}(I)$, alors $s_{t_0}^{-1}$ est dérivable sur $s_{t_0}(I)$ tel que

$$\left(s_{t_0}^{-1}\right)'\left(s'_{t_0}(t)\right) = \frac{1}{s'_{t_0}(t)}$$

Ainsi, s_{t_0} est un difféomorphisme de I sur $J = s_{t_0}(I)$, donc aussi $s_{t_0}^{-1}$.

Par conséquent, $s_{t_0}^{-1}$ est admissible (d'après la définition).

Ainsi, γ_1 $(= \gamma \circ s_{t_0}^{-1})$ a le même support géométrique que γ.

La courbe γ_1 est normale, en effet, sot

$$y = s(t)$$

On a

$$\left(\gamma \circ s^{-1}\right)'(y) = \gamma'\left(s^{-1}(y)\right)\left(s^{-1}\right)'(y)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left(\gamma \circ s^{-1}\right)'(s(t)) &= \gamma'\left(s^{-1}(s(t))\right)\left(s^{-1}\right)'(s(t)) \\
&= \gamma'(t)\left(s^{-1}\right)'(s(t)) \\
&= \gamma'(t)\frac{1}{s'(t)} \\
&= \gamma'(t)\frac{1}{\gamma'(t)} = 1
\end{aligned}$$

Donc

$$\left\|\left(\gamma \circ s^{-1}\right)'(y)\right\| = 1$$

La remarque suivante est importante :

Remarque : Soit C une courbe géométrique et l sa longuer. Si on étale C sur une droite, on obtient un segment de longueur l, identifiable à un intervalle $I = [a, b]$.

Ainsi, la correspondance point par point entre I et C donne une paramétrisation normale

$$\gamma : [0, l] \to C$$

Proposition : Soit

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$$

une courbe paramétrée de classe C^1. Alors, la parmétrisation γ est normale si et seulement si

$$\forall s \in I, \left\| (\gamma)' (s) \right\| = 1$$

Preuve :

Implication directe : Si la paramétrisation est normale, alors

$$s_{t_0} (t) = \int_{t_0}^{t} \| \gamma' (u) \| \, du = t - t_0$$

Ceci donne

$$s'_{t_0} (t) = \| \gamma' (t) \| = 1, \forall t \in I$$

Implication indirecte : Si

$$\| \gamma' (s) \| = 1, \forall s \in I$$

alors,

$$\forall [t_1, t_2] \subset I, l (\gamma / [t_1, t_2]) = \int_{t_1}^{t_2} \| \gamma' (u) \| \, du = t_2 - t_1$$

ce qui donne une paramétrisation normale.

Exemple :

Soit

$$\begin{aligned} \gamma :]0, 1[&\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma (t) = \left(t, \sqrt{1 - t^2} \right) \end{aligned}$$

La courbe paramétrée γ est le quard du cercle $c((0, 0), 1)$ situé sur le premier quadrant du plan. On a

$$s_0 (t) = \int_0^t \| \gamma' (u) \| \, du = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du = \arcsin t$$

La fonction

$$\arcsin :]0, 1[\to \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

est bijective. Soit la paramétrisation

$$\begin{aligned}\gamma_1 = \gamma \circ s_0^{-1} : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto \gamma_1(s) = \gamma(\sin s)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\gamma(\sin(s)) &= \left(\sin s, \sqrt{1-\sin^2 s}\right) \\ &= (\sin s, \cos s)\end{aligned}$$

On obtient ainsi le quard du cercle $c((0,0),1)$ situé sur le premier quadrant du plan. La valeur de s est l'angle entre $\overrightarrow{O\gamma(s)}$ et le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Fig.1.6).

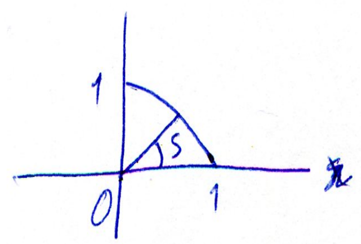

Figure 1.6 – Paramétrisation par abscice curviligne pour l'exemple.

Chapitre 2

Tracé des courbes planes

2.1 Coordonnées cartésiennes

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto f(t) = (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

une courbe paramétrée.

2.1.1 Plan d'étude

Pour tracer la courbe paramétrée C associée à f on suit les étapes suivantes :
1) Trouver le domaine de définition de f.
2) Etude des périodes et des symétries de f.
3) Etude des branches infinies.
4) Tracé du tableau de variations de f.
5) Recherche de points particuiers.
6) Tracé de la courbe C.

2.1.2 Domaine de définition

C'est l'ensemble D sur lequel les composantes x et y sont définies.

2.1.3 Période et symétries

a) Si

$$\exists T > 0, \forall t \in D, \begin{cases} x(t+T) = x(t) \\ y(t+T) = y(t) \end{cases}$$

alors f est T-périodique. On peut réstreindre l'étude à $D \cap I$ où I est un intervalle de longueur T. On obtient ainsi toute la courbe.

b) Si une des quatres propriétés suivantes est vérifiée,

i)

$$\forall t \in D, \begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$$

ii)

$$\forall t \in D, \begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$$

iii)

$$\forall t \in D, \begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$$

iv)

$$\forall t \in D, \begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$$

alors la courbe est symétrique. On restreint ainsi l'étude à $D \cap \mathbb{R}^+$ et on obtient toute la courbe :

- parcourue deux fois dans le cas i).

- en la ccomplétant par une symétrie par rapport à l'axe des y dans le cas ii).

- en la ccomplétant par une symétrie par rapport à l'axe des x dans le cas iii).

- en la ccomplétant par une symétrie par rapport à l'origine dans le cas iv).

2.1.4 Etude des branches infinies

Définition : On dit que la courbe admet une branche infinie si :

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = \infty \text{ ou } \lim_{t \to t_0} y(t) = \infty$$

pour $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

On a :

1) Si

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = l \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$$

alors la courbe admet la droite (Δ) : $x = l$ comme asymptote vérticale.

2) Si

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty \text{ et } \lim_{t \to t_0} y(t) = k \in \mathbb{R}$$

alors la courbe admet la droite $(\Delta) : y = k$ comme asymptote horisontale.

3) Si

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty \text{ et } \lim_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$$

on étudie

$$\lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$$

Dans ce cas, si

i)

$$\lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$$

alors la courbe admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des y.

ii)

$$\lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$$

alors la courbe admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des x.

iii)

$$\lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \neq 0$$

alors :

a) si

$$\lim_{t \to t_0} (y(t) - ax(t)) = b \in \mathbb{R}$$

on a la droite $(\Delta) : y = ax + b$ est une asymptote à la courbe. La position de la courbe par rapport à la droite (Δ) dépend dans ce cas du signe de $y - ax - b$.

b) si

$$\lim_{t \to t_0} (y(t) - ax(t)) = \pm\infty$$

alors la courbe admet une branche parabolique dans la direction de la droite $(\Delta) : y = ax$.

c) si

$$\lim_{t \to t_0} (y(t) - ax(t)) \text{ n'existe pas}$$

on ne paut rien dire.

iv)

$$\lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} \text{ n'existe pas}$$

on ne paut rien dire.

2.1.5 Etude des points particuliers

Définition : Soit

$$V(t) = (x(t), y(t))$$

et supposons que les composantes $x(t)$ et $y(t)$ sont dérivable en t_0.

Si

$$V'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0)$$

alors le point $M_0 = (x(t_0), y(t_0))$ est dit ordinaire. La droite $T = \langle V'(t_0) \rangle$ (la droite engendré par $V'(t_0)$) passant par M_0 est tangent à la courbe en ce point.

Si

$$V'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) = (0,0)$$

alors le point $M_0 = (x(t_0), y(t_0))$ est dit stationnaire ou singulier.

Si

$$\exists t_1 \in D, t_1 \neq t_0, M_1 = M_0$$

où M_1 est le point $(x(t_1), y(t_1))$, alors le point $M_0 = (x(t_0), y(t_0))$ est dit double ou multiple.

Tangentes aux points stationnaires Supposons que x et y sont suffisamment dérivables.

Si

$$V'(t_0) = V''(t_0) = ... = V^{(p-1)}(t_0) = 0 \text{ et } V^{(p)}(t_0) \neq 0$$

où $V^{(p)}(t_0) = \left(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)\right)$, alors $T = \left\langle V^{(p)}(t_0) \right\rangle$ passant par M_0 est tangent à la courbe en ce point. En effet,

$$\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)} = (t-t_0)^p V^{(p)}(t_0) + \varepsilon (t-t_0)^p$$

Donc la droite $(\gamma(t_0)\gamma(t))$ est portée (engendrée) par le vecteur $V^{(p)}(t_0)$ quand t devient très proche de t_0 ($\varepsilon \to 0$).

Position de la courbe par rapport à T

Soit $p > 0$ le premier entier tel que $V^{(p)}(t_0) = \left(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)\right) \neq (0,0)$. On a

$$p = \min\left\{p \in \mathbb{N}^*, V^{(p)}(t_0) \neq (0,0)\right\}$$

Soit

$$q = \min\left\{p \in \mathbb{N}^*, V^{(q)}(t_0) \neq \lambda V^{(p)}(t_0), \forall \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

ceci signifie que $V^{(p)}(t_0)$ et $V^{(q)}(t_0)$ ne sont pas collinéaires.

Le développement limité de f au voisinage de t_0 à l'ordre q donne :

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \dfrac{(t-t_0)^p}{p!} x^{(p)}(t_0) + ... + \dfrac{(t-t_0)^q}{q!} x^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q \varepsilon_1(t) \\ y(t) = y(t_0) + \dfrac{(t-t_0)^p}{p!} y^{(p)}(t_0) + ... + \dfrac{(t-t_0)^q}{q!} y^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q \varepsilon_2(t) \end{cases}$$

où

$$\lim_{t \to t_0} \varepsilon_1(t) = \lim_{t \to t_0} \varepsilon_2(t) = 0$$

Ainsi

$$f(t) = f(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} V^{(p)}(t_0) + ... + \frac{(t-t_0)^q}{q!} V^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q \varepsilon(t)$$

où $\varepsilon(t) = (\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))$. Comme $V^{(p+1)}(t_0)$,..., $V^{(q-1)}(t_0)$ sont colinéaires à $V^{(p)}(t_0)$ alors,

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} V^{(p)}(t_0) + \lambda_{p+1} \frac{(t-t_0)^{p+1}}{(p+1)!} V^{(p)}(t_0) + ... + \lambda_{q-1} \frac{(t-t_0)^{q-1}}{(q-1)!} V^{(p)}(t_0) + \\ & \frac{(t-t_0)^q}{q!} V^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q \varepsilon(t) \end{aligned}$$

On aura

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t_0) + (t-t_0)^p \left(\frac{1}{p!} + \lambda_{p+1} \frac{1}{(p+1)!} + ... + \lambda_{q-1} \frac{1}{(q-1)!} \right) V^{(p)}(t_0) + \\ & \frac{(t-t_0)^q}{q!} V^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q \varepsilon(t) \end{aligned}$$

Soit

$$\overrightarrow{M(t_0)\, M(t)} = (x_1(t), y_1(t))$$

dans le repère $\left(M(t_0), V^{(p)}(t_0), V^{(q)}(t_0)\right)$. On a $x_1(t)$ et $y_1(t)$ sont de l'ordre de $\dfrac{(t-t_0)^p}{p!}$ et $\dfrac{(t-t_0)^q}{q!}$ respectivement au voisinage de t_0.

On a ainsi, si :

a) p **est pair et** q **est impair :**

Pour t appartenant à un certain voisinage de t_0, on a $x_1(t) \geq 0$ par contre $y_1(t)$ est du signe de $(t - t_0)$.

Ainsi, la courbe traverse T en $M(t_0)$.

Le point $M(t_0)$ est dit point de rebroussement de première espèce (Figure 2.1).

b) p **est pair et** q **est pair :**

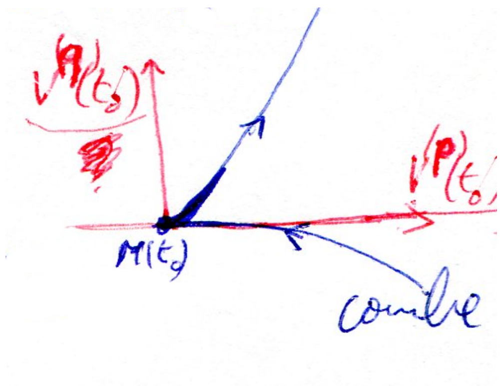

FIGURE 2.1 – Un point de rebroussement de première espèce.

Pour t appartenant à un certain voisinage de t_0, on a $x_1(t) \geq 0$ et $y_1(t) \geq 0$.

Ainsi, la courbe ne traverse pas T.

Le point $M(t_0)$ est dit point de rebroussement de deuxième espèce (Figure 2.2).

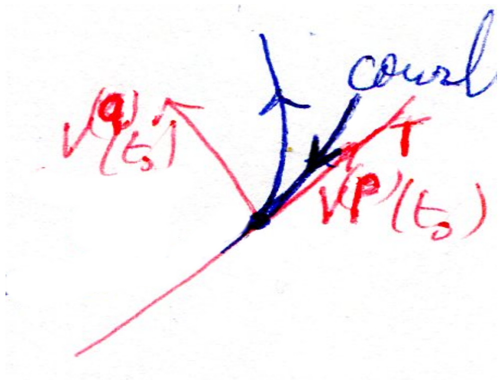

FIGURE 2.2 – Un point de rebroussement de deuxième espèce.

c) p est impair et q est pair :

Pour t appartenant à un certain voisinage de t_0, on a $y_1(t) \geq 0$ par contre $x_1(t)$ est du signe de $(t - t_0)$.

Ainsi, la courbe touche T en $M(t_0)$.

Le point $M(t_0)$ est dit méplat (Figure 2.3).

d) p est impair et q est impair :

Pour t appartenant à un certain voisinage de t_0, on a $x_1(t)$ et $y_1(t)$ sont du signe de $(t - t_0)$.

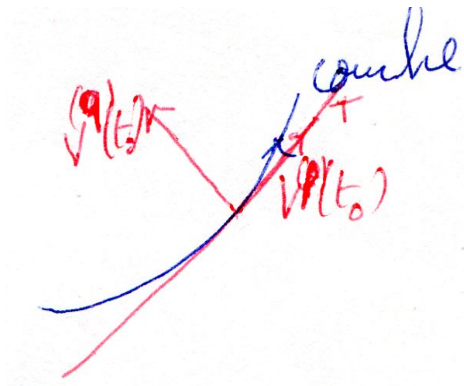

FIGURE 2.3 – Un méplat.

Ainsi, la courbe traverse T en $M(t_0)$.
Le point $M(t_0)$ est dit point d'inflexion (Figure 2.4).

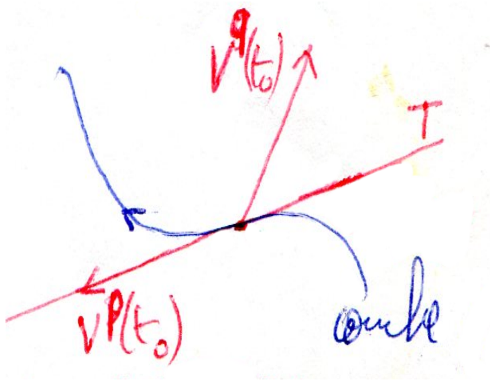

FIGURE 2.4 – Un point d'iflexion.

Exemple :
Soit

$$f(t) = (x(t), y(t)) = \left(t^2 + \frac{2}{t}, t^2 + \frac{1}{t^2}\right)$$

Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}^*$
La courbe paramétrée ne présente aucune symétrie.
On a

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = \lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \pm\infty$$

Ensuite, on a

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{y(t)}{x(t)}=1$$

et

$$\lim_{t\to\pm\infty}(y(t)-x(t))=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=0$$

Donc la droite $(\Delta): y=x$ est une asymptote à la courbe lorsque t tend vers l'infini.

De plus,

$$y(t)-x(t)=\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=0$$

est du signe de $-\frac{2}{t}$ quand t est au voisinage de l'infini. donc :

-la courbe est en dessous de l'asymptote (Δ) quand t est au voisinage de $+\infty$.

-la courbe est au dessus de l'asymptote (Δ) quand t est au voisinage de $-\infty$.

On a aussi :

$$\lim_{t\to 0^+}x(t)=+\infty,\ \lim_{t\to 0^-}x(t)=-\infty,\ \lim_{t\to 0}y(t)=+\infty$$

et

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{y(t)}{x(t)}=+\infty,\ \lim_{t\to 0^-}\frac{y(t)}{x(t)}=-\infty$$

Donc la courbe admet deux branches paraboliques de direction l'axe des y lorsque t tend vers zéro.

De plus

$$x'(t)=\frac{2}{t^2}(t-1)\left(t^2+t+1\right)$$

et

$$y'(t)=\frac{2}{t^3}\left(t^2+1\right)(t-1)(t+1)$$

Tableau de variations de la fonction f :

On a

$$x'(1)=y'(1)=0$$

D'où, $(x(1),y(1))=(3,2)$ est un point stationnaire pour la courbe.

On a aussi

$$V''(1)=(x''(1),y''(1))=(6,8)\neq(0,0)$$

Donc $\langle V''(1)=(6,8)\rangle$ est une droite tangente à la courbe au point $(3,2)$.

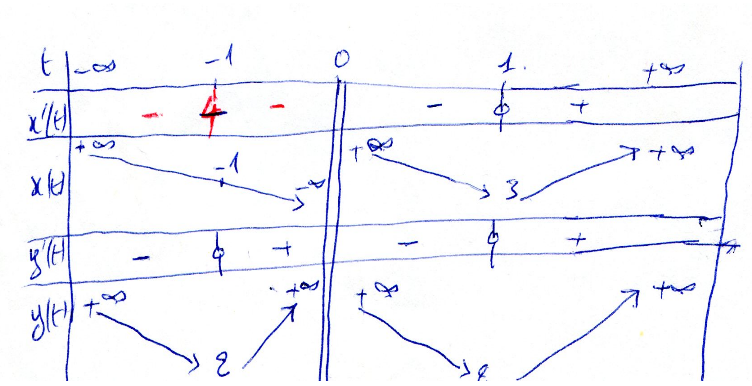

FIGURE 2.5 – Tableau de variations de la fonction f.

De plus

$$V'''(1) = (x'''(1), y'''(1)) = (-12, -24) \neq (0, 0)$$

Comme

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, V'''(1) \neq \lambda V''(1)$$

Donc $V'''(1)$ et $V''(1)$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent, le point $(3, 2)$ est un point de rebroussement de première espèce.

Soit maintenant $t' \neq t$ tel que $M(t') = M(t)$. On a,

$$\begin{cases} x(t') = x(t) \\ y(t') = y(t) \end{cases}$$

C'est à dire,

$$\begin{cases} (t')^2 + \dfrac{2}{t'} = t^2 + \dfrac{2}{t} \\ (t')^2 + \dfrac{1}{(t')^2} = t^2 + \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} (t')^2 - t^2 = 2\dfrac{t' - t}{t't} \\ (t')^2 - t^2 = 2\dfrac{(t')^2 - t^2}{(t')^2 t^2} \end{cases}$$

On obtient,

$$\begin{cases} tt' = \pm 1 \\ t + t' = \pm 2 \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} t' = \pm\dfrac{1}{t} \\ t^2 \mp 2t \pm 1 = 0 \end{cases}$$

Soit d'abord

$$\begin{cases} t' = \dfrac{1}{t} \\ t^2 - 2t + 1 = 0 \end{cases}$$

Ceci implique que

$$t = 1 = t'$$

ce qui est exclu puisque $t' \neq t$.

Soit maintenant

$$\begin{cases} t' = -\dfrac{1}{t} \\ t^2 + 2t - 1 = 0 \end{cases}$$

On aura

$$t = -1 + \sqrt{2} \text{ et } t' = 1 - \sqrt{2}$$

D'où $M(t$

On obt … r la figure 2.6.

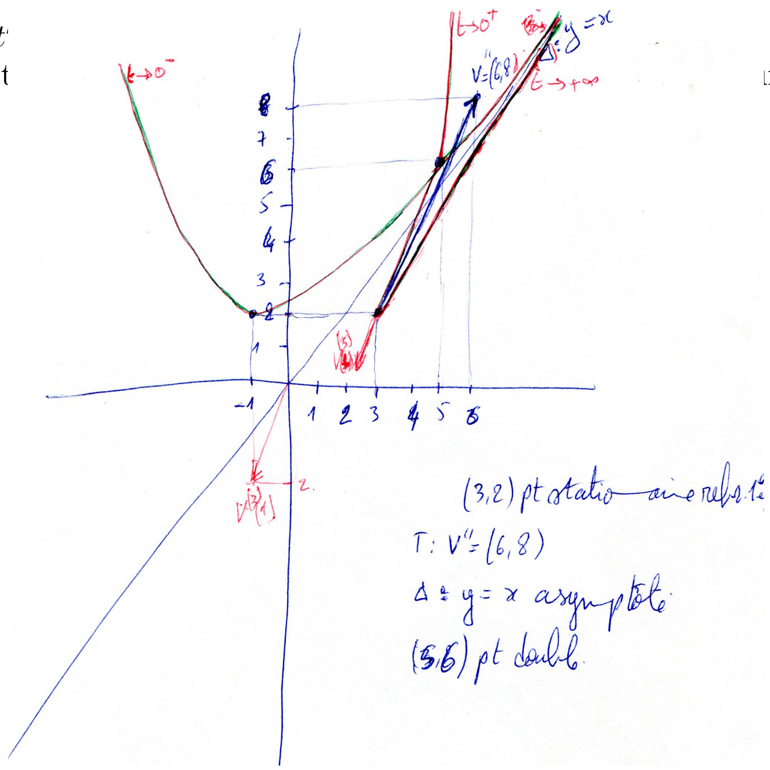

FIGURE 2.6 – Graphe de la courbe paaramétrée f.

2.2 Coordonnées polaires

2.2.1 Rappel

Les coordonnées polaires d'un point $M = (x, y)$ du plan sont le couple (ρ, θ) où $\rho = OM$ et θ et l'angle $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right)$ (le plan est muni du repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$). On a :

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho \cos \theta \\ y(\theta) = \rho \sin \theta \end{cases}$$

On note

$$u_\theta = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|} \overrightarrow{OM} = \cos \theta \overrightarrow{i} + \sin \theta \overrightarrow{j}$$

et v_θ est tel que

$$\widehat{(u_\theta, v_\theta)} = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ et } \|v_\theta\| = 1$$

On a $u_\theta \perp v_\theta$, et u_θ et v_θ sont des vecteurs unitaires.

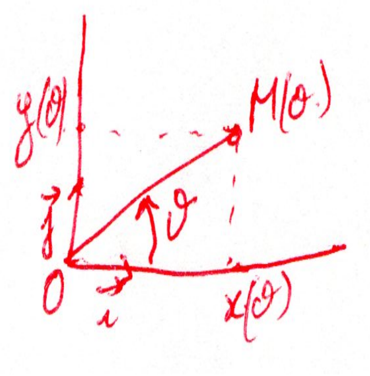

FIGURE 2.7 – Coordonnées polaires.

Définition : La courbe C définie en coordonnées polaires par

$$\rho = f(\theta) = \rho(\theta), \theta \in I$$

est l'ensemble des points M dont les coordonnées satisfont

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta \\ y(\theta) = \rho(\theta) \sin \theta \end{cases}, \theta \in I$$

Exemples :

1) Equations d'une droite :

Soit (Δ) : $ax + by + c = 0$ une droite telle que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $c \neq 0$. On a :

$$a\rho\cos\theta + b\rho\sin\theta + c = 0$$

C'est-à-dire,

$$\rho\left(a\cos\theta + b\sin\theta\right) = -c$$

Donc,

$$\rho = \frac{-c}{a\cos\theta + b\sin\theta}$$

Autrement dit,

$$\rho = \frac{1}{\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta}$$

avec

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{-a}{c}, \frac{-b}{c}\right) \neq (0, 0)$$

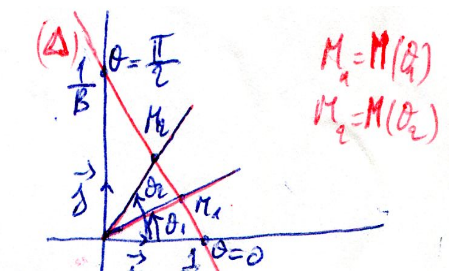

Figure 2.8 – La droite (δ) en coordonnées polaires.

2) Equation d'un cercle :

Soit le cercle $c\,(O, R)$ de centre l'origine et de rayon R. On aura en coordonnées polaires,

$$\rho\,(\theta) = R,\ \theta \in [0, 2\pi]\ \text{ au moins.}$$

Remarque :

Soit $M(\theta)$ le point M en θ.

Si $f\,(\theta) \geq 0$, on a l'application

$$M(\theta) = (f(\theta), \theta)$$

Si $f\,(\theta) \leq 0$, on a l'application

$$M(\theta) = (-f(\theta), \theta + \pi)$$

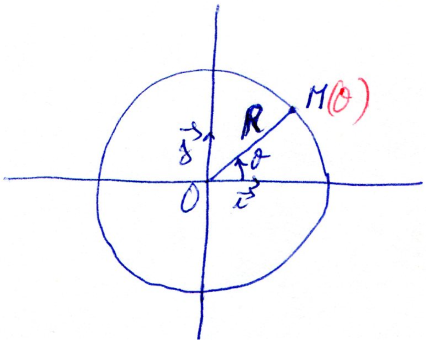

FIGURE 2.9 – Le cercle $c\,(O, R)$ en coordonnées polaires.

2.2.2 Ensemble d'étude

Supposons que f est définie sur $\mathbb{R}$.

1) Si f est T-périodique, alors le domaine d'étude de f se réduit à un intervalle d'amplitude T ($[0, T[$, $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$, ...). Le reste de la courbe s'obtient par rotation successive d'angle T.

2) Si f est paire, il suffit d'étudier f sur $[0, +\infty[$ ou sur $[-\infty, 0[$. Le reste de la courbe s'obtient par symétrie par rapport l'axe des x.

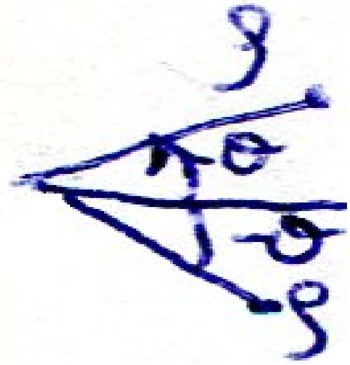

FIGURE 2.10 – La fonction f est paire.

3) Si f est impaire, il suffit d'étudier f sur $[0, +\infty[$ ou sur $[-\infty, 0[$. Le reste de la courbe s'obtient par symétrie par rapport l'axe des y.

4) Si $\exists a \in \mathbb{R}, \forall \theta \in \mathbb{R}, f\,(a - \theta) = f\,(\theta)$, il suffit d'étudier f sur $\left[\frac{a}{2}, +\infty\right[$

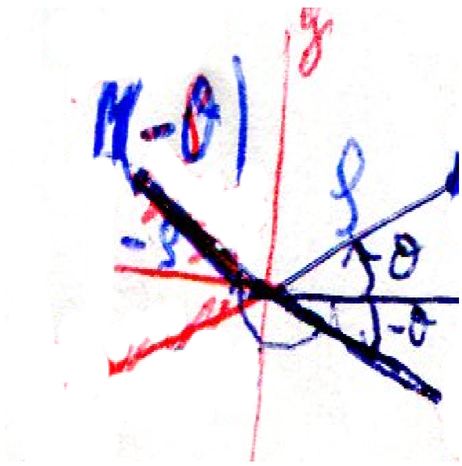

FIGURE 2.11 – La fonction f est impaire.

ou sur $\left[-\infty, \dfrac{a}{2}\right[$. Le reste de la courbe s'obtient par symétrie par rapport la droite $\theta = \dfrac{a}{2}$.

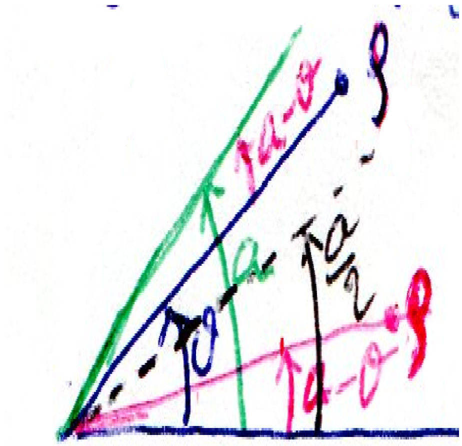

FIGURE 2.12 – Symétrie de la courbe par rapport à $\theta = a/2$.

Si $a = 0$, on retrouve le cas où f est paire.

5) Si $\exists a \in \mathbb{R}, \forall \theta \in \mathbb{R}, f\left(a-\theta\right) = -f\left(\theta\right)$, il suffit d'étudier f sur $\left[\dfrac{a}{2}, +\infty\right[$ ou sur $\left[-\infty, \dfrac{a}{2}\right[$. Le reste de la courbe s'obtient par symétrie par rapport la droite $\theta = \dfrac{a+\pi}{2}$.

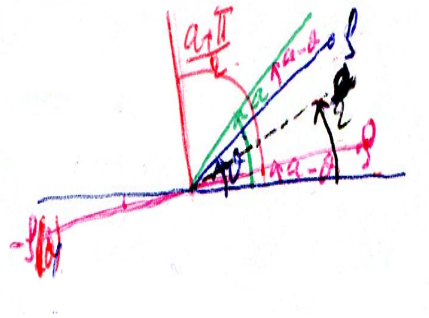

FIGURE 2.13 – Symétrie de la courbe par rapport à $\theta = (a+\pi)/2$.

Si $a = 0$, on retrouve le cas où f est impaire.

2.2.3 Tangentes

Théorème 2.1. *Soit C la courbe polaire $\rho = f(\theta)$ de classe C^1 au voisinage de θ_0. Alors C admet une tangente en $M(\theta_0)$ définie par $\tan\alpha = \dfrac{\rho}{\rho'}$, où α est l'angle orienté entre le rayon vecteur et la tangente.*
Si de plus $\rho(\theta_0) = 0$, alors $\alpha = 0$.

Preuve.
On a

$$OM = \rho(\theta)\, u_\theta$$

D'autre part,

$$u_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\frac{du_\theta}{d\theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Après dérivation par rapport à θ,

$$\frac{du_\theta}{d\theta} = \begin{pmatrix} \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire,

$$\frac{du_\theta}{d\theta} = u_{\theta+\frac{\pi}{2}} = v_\theta$$

puisque $\widehat{(u_\theta, v_\theta)} = \dfrac{\pi}{2}$. Donc,

$$\frac{dOM}{d\theta} = \rho'(\theta)\, u_\theta + \rho(\theta)\, u'_\theta$$

Ainsi,

$$\frac{dOM}{d\theta} = \rho'(\theta)\, u_\theta + \rho(\theta)\, v_\theta \tag{2.1}$$

D'où

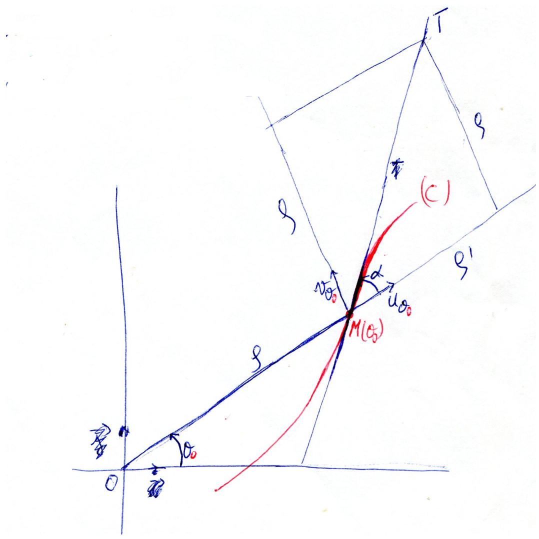

Figure 2.14 – Tangente à la courbe

2.2.4 Points particuliers

Définition 2.2. *1) Le point $M(\theta)$ est dit régulier si $(f(\theta), f'(\theta)) \neq (0,0)$ ($\frac{dOM}{d\theta} \neq (0,0)$).*
La tangente en $M(\theta)$ a pour vecteur directeur $f'(\theta)\, u_\theta + f(\theta)\, v_\theta$.
2) Le point $M(\theta)$ est dit stationnaire si $(f(\theta), f'(\theta)) = (0,0)$.
3) Le point $M(\theta)$ est dit birégulier si $f^2(\theta) + 2f'^2(\theta) - 2f(\theta)\, f''(\theta) \neq 0$.
4) Le point $M(\theta)$ est dit double s'il est atteint deux fois.

Remarque 2.3. *1) Le seul point stationnaire est l'origine.*
2) Le point $M(\theta)$ est birégulier implique que $M(\theta)$ est régulier.

Branches infinies

Proposition 2.4. *1) Si*

$$\lim_{\theta \to \theta_0} f(\theta) = \pm\infty$$

alors C admet la droite $\theta = \theta_0$ comme direction asymptotique.
2) Si

$$\lim_{\theta \to \pm\infty} f(\theta) = \pm\infty$$

alors C admet une branche infinie spirale.
3) Si

$$\lim_{\theta \to \theta_0} f(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = l \in \mathbb{R}$$

alors C admet la droite $y = l$ comme asymptote.
4) Si

$$\lim_{\theta \to \theta_0} f(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = \pm\infty$$

alors C admet une branche parabolique vers la droite la droite $\theta = \theta_0$.
5) Si

$$\lim_{\theta \to \pm\infty} f(\theta) = a$$

alors C admet le cercle $c((0,0), |a|)$ comme courbe asymptote.

Preuve. On montre 3) et 4).
Soit $M(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ dans le repère $(O, u_{\theta_0}, v_{\theta_0})$. On a ,

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta - \theta_0) \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

Soit

$$\lim_{\theta \to \theta_0} y = l$$

Si $l = \pm\infty$, on a une branche parabolique dans la direction des x, donc dans la direction de u_{θ_0}, donc dans la direction de la droite $\theta = \theta_0$ (pour 4)).

Si $l \in \mathbb{R}$, alors la droite $y = l$ est une asymptote de C (pour 3)). On étudie dans ce cas le signe de $y - l$ pour avoir la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Exemple :
Soit C la courbe paramétrée d'équation polaire

$$\rho(\theta) = \tan 2\theta$$

Domaine de définition : $\rho(\theta)$ n'est pas définie pour

$$2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Donc pour

$$\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi, le domaine de définition $D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right[$.

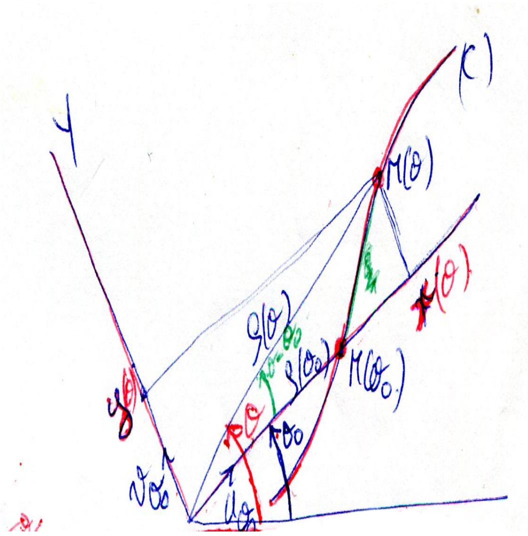

Figure 2.15 – Le repère $(O, u_{\theta_0}, v_{\theta_0})$.

Domaine d'étude : On a

$$\rho\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin(2\theta+\pi)}{\cos(2\theta+\pi)}=\frac{-\sin(2\theta)}{-\cos(2\theta)}=\tan 2\theta=\rho(\theta)$$

Ainsi, la fonction ρ est $\frac{\pi}{2}$-périodique. On réduit l'étude de ρ à $D_1=\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$. Le reste de la courbe s'obtient par rotation d'un angle $\frac{\pi}{2}$.

la fonction ρ est impaire, puisque

$$\rho(-\theta)=-\rho(\theta)$$

Ceci signifie que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des y. On réduit l'étude de ρ à $D_2=\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$.

Variation de ρ : On a

$$\rho'(\theta)=\frac{2}{\cos^2 2\theta}>0$$

Ainsi,

$$\forall\theta\in D_2, \rho'(\theta)>0$$

C'est à dire, la fonction ρ est strictement croissante sur D_2.

La courbe admet la droite $\theta=\frac{\pi}{4}$ comme direction asymptotique.

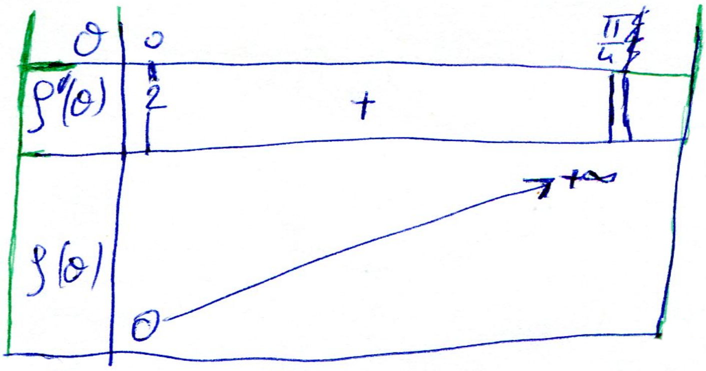

FIGURE 2.16 – Tableau de variations de la fonction ρ.

Soit le point $M = (0,0)$ $(\theta = 0)$. La tangente à la courbe au point M est portée par le vecteur

$$T_M = \left(\rho'(0), \rho(0)\right) = (2, 0)$$

D'autre part,

$$\rho(\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \tan 2\theta \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

Posons $h = \theta - \dfrac{\pi}{4}$. On aura,

$$\rho(\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(2h + \frac{\pi}{2}\right)\sin h$$

C'est-à-dire,

$$\rho(\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(2h + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(2h + \frac{\pi}{2}\right)}\sin h$$

Donc,

$$\rho(\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos(2h)}{-\sin(2h)}\sin h$$

Aurement dit,

$$\rho(\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{2}\frac{2h}{\sin h}\frac{\sin h}{h}\cos(2h)$$

D'où

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \rho(\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

Ceci signifie que la courbe admet la droite $y = \frac{-1}{2}$ (dans le repère $\left(O, u_{\frac{\pi}{4}}, v_{\frac{\pi}{4}}\right)$) comme asymptote.

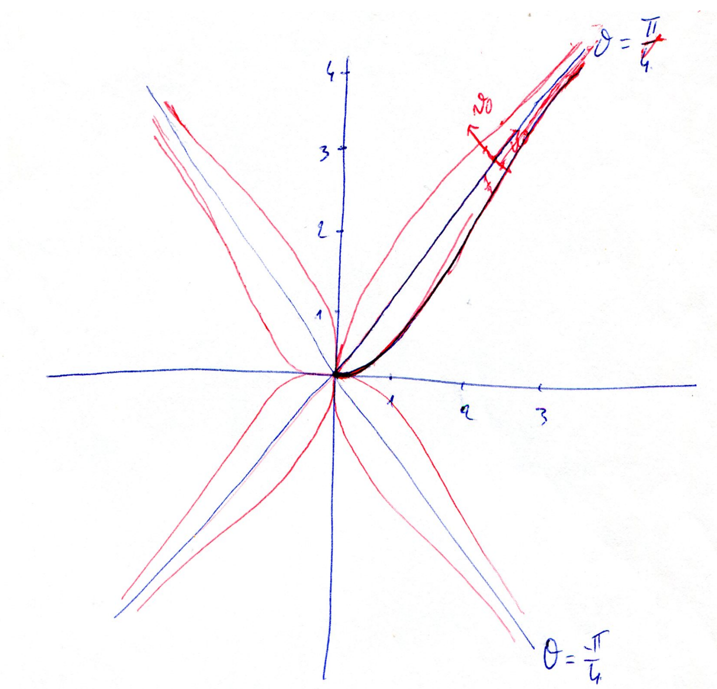

FIGURE 2.17 – Tracer de la courbe de ρ.

Chapitre 3

Courbes planes

3.1 Repère de Frenet

Définition 3.1. *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe C^1.*
Le repère de Frenet de γ au point $\gamma(t)$ est le repère orthonormé $(\gamma(t), T(t), N(t))$ où

$$T(t) = \frac{1}{\|\gamma(t)\|}\gamma'(t)$$

est tangent à la courbe au point $\gamma(t)$.
Le vecteur $N(t)$ est un vecteur normal à la courbe en $\gamma(t)$ tel que $\widehat{(T,N)} = \frac{\pi}{2}\,[2k\pi]$.

Remarque 3.2. *Le vecteur $T(t)$ dépend de la paramétrisation. En effet, si on change le sens de parcours de la courbe, alors le vecteur tangent sera remplacé par son opposé. Ainsi, le repère de Frenet dépend du sens de parcours de la paramétrisation ainsi que de l'orientation du plan.*

3.2 Courbure

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe C^2, paramétrée par abscisse curviligne.

Proposition 3.3. *Le vecteur $\gamma''(s_0)$ est colinéaire à $N(s)$:*
il existe une application continue $\overline{K} : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall s \in I, \gamma''(s) = T'(s) = \overline{K}(s).N(s)$$

FIGURE 3.1 – Les deux vecteurs T et N.

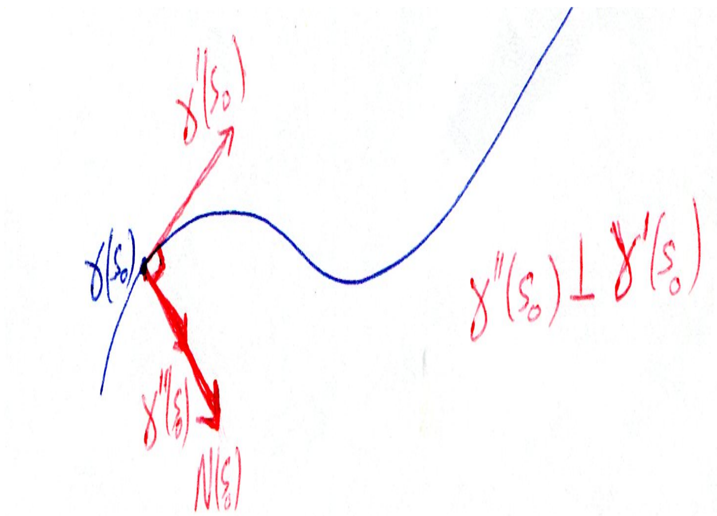

FIGURE 3.2 – Le vecteur γ'' .

Preuve. On a

$$\forall s \in I, T(s) . T(s) = \|T(s)\|^2 = \|\gamma'(s)\|^2 = 1$$

On obtient après dérivation,

$$\forall s \in I, T(s) . T'(s)$$

Ainsi, $T'(s) \perp T(s)$ (ils sont perpendiculaires). Donc, $T'(s) // T(s)$ (ils sont colinéaires). Alors,

$$\exists \overline{K} \text{ tel que } T'(s) = \overline{K}(s) . N(s)$$

Or $T'(s) = \gamma''(s)$ puisque $T(s) = \frac{1}{\|\gamma(s)\|}\gamma'(s)$ et $\|\gamma'(s)\| = 1$. Donc, $\gamma''(s) = \overline{K}(s) . N(s)$.

Définition 3.4. *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée normale régulière de classe C^2, et soit $p = \gamma(s)$ un point de la courbe.*
La courbure algébrique $\overline{K}(s)$ de γ en p est

$$\overline{K}(s) = \gamma''(s) . N(s) = T(s) . N(s)$$

La courbure $K(s)$ de γ en p est

$$K(s) = \left|\overline{K}(s)\right| = \|\gamma''(s)\|$$

Si $K(s) \neq 0$, alors p est dit birégulier.

Remarque 3.5. *Une courbe mesure la manière dont une courbe s'éloigne localement d'une ligne droite. Elle évalue le rapport entre la variation de la direction de la tangente à la courbe et un très petit déplacement sur celle-ci. Ainsi, plus ce rapport est important, plus la courbure est importante.*
Le vecteur $\gamma''(s_0)$ donne donc des informations sur la forme de la courbe au voisinage de $\gamma(s_0)$. Plus $\|\gamma''(s_0)\|$ est grand, plus la courbe est courbée.

Exemple : Soit

$$\gamma(\theta) = \left(r\cos\frac{\theta}{r}, r\sin\frac{\theta}{r}\right), \theta \in [0, 2\pi]$$

une courbe paramétrée du cercle $c((0,0), r)$. On a

$$\|\gamma'(\theta)\| = 1$$

C'est à dire, γ est normale.

D'autre part,

$$K(\theta) = \|\gamma''(\theta)\| = \frac{1}{r}$$

est la courbure d'un cercle de rayon r.

Proposition 3.6. *Dans le repère de Frenet, γ peut s'écrire :*

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + (s - s_0) T(s) + \overline{K}(s) \frac{(s - s_0)^2}{2} N(s_0) + o\left((s - s_0)^2\right)$$

Preuve. La courbe γ est paramétrée par abscisse curviligne, donc elle est normale. Ainsi

$$T'(s) = \gamma'(s)$$

et $\|\gamma'(s)\| = 1$.

Définition 3.7. *- Le cercle de rayon $\frac{1}{K(t)}$ et tangent à la courbe γ au point $\gamma(t)$ est dit cercle osculateur au point $\gamma(t)$.*
- Le centre de courbure de $\gamma(t)$ en un point de courbure $\neq 0$ est

$$C'(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\overline{K}(t)} N(t)$$

-Le cercle osculateur est le cercle de centre $C(t)$ et de rayon $\frac{1}{K(t)}$.

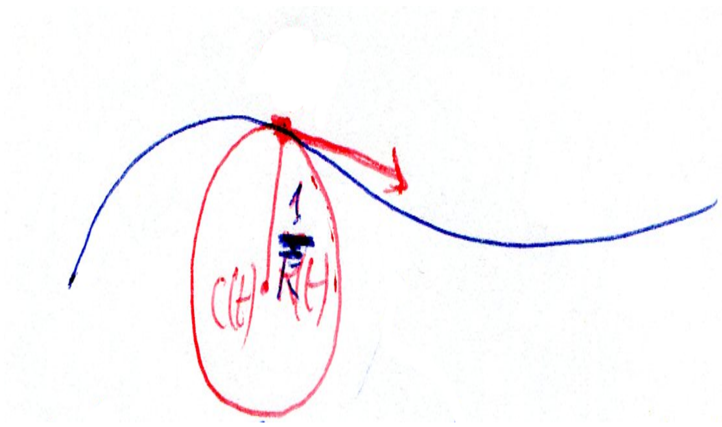

FIGURE 3.3 – Le cercle osculateur.

Proposition 3.8. *(Formules de Frenet) Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée normale et régulière de classe C^2. Alors,*

$$\forall s \in I, \begin{cases} \text{1) } T'(s) = \overline{K}(s) . N(s) \\ \text{2) } N'(s) = -\overline{K}(s) . T(s) \end{cases}$$

Preuve.
1) On a

$$T'(s) = \gamma''(s) = \overline{K}(s) . N(s) .$$

2) On a

$$N(s) . N(s) = \|N(s)\|^2 = 1 \tag{3.1}$$

Après dérivation, on obtient :

$$N'(s).N(s) = 0$$

Donc $N'(s)$ est colinéaire à $T(s)$ $(N'(s) \perp N(s))$.

D'autre part,

$$T(s).N(s) = 0$$

On obtient après dérivation,

$$T'(s).N(s) + T(s).N'(s) = 0$$

C'est-à-dire,

$$\overline{K}(s).N(s).N(s) = -T(s).N'(s)$$

Ceci donne, d'après (3.1) :

$$\overline{K}(s) = -T(s).N'(s) \tag{3.2}$$

En multipliant les deux membres (3.2),

$$\overline{K}(s).T(s) = -T(s).T(s).N'(s)$$

Ainsi,

$$\overline{K}(s).T(s) = -N'(s)$$

Chapitre 4

Courbes Gauches

Définition 4.1. *Une courbe gauche est une courbe de* $\mathbb{R}^3$ *qui n'est pas contenue dans un plan.*

4.1 Courbure et normale principale

Définition 4.2. *Soit* $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ *une courbe paramétrée normale et régulière de classe* C^2. *On appelle*

$$K(s) = \|\gamma''(s)\|$$

la courbure de γ *au point* $\gamma(s)$.

Remarque 4.3. *On ne définit pas de courbure algébrique d'une courbe gauche, du fait qu'iln'est pas possible d'avoir un signe cohérent.*

Définition 4.4. *Soit* $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ *une courbe paramétrée normale et régulière de classe* C^2.
Un point $p = \gamma(s)$ *est dit birégulier si* $K(s) \neq 0$ *(donc* $\gamma''(s) \neq 0$*).*
On appelle

$$N(s) = \frac{1}{K(s)} T'(s) = \frac{1}{\|\gamma''(s)\|} \gamma''(s)$$

la normale principale de γ *au point birégulier* p.

Définition 4.5. *Soit* $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ *une courbe paramétrée par abscisse curviligne, régulière de classe* C^2 *et soit* $p = \gamma(s)$ *un point de* γ *birégulier.*
Le plan vectoriel $\langle T(s), N(s) \rangle$ *est dit plan osculateur au point* p.
On appelle

$$R(s) = \frac{1}{K(s)}$$

le rayon de courbure au point p*, et*

$$C(s) = \gamma(s) + R(s) . N(s)$$

le centre de courbure de γ *au point* p*.*
La sphère $S(C(s), R(s))$ *est dite la sphère osculatrice.*

4.2 Repère de Frenet

4.2.1 Produit vectoriel (Rappel)

Définition 4.6. *Le produit vectoriel de deux vecteurs* u *et* v *de* $\mathbb{R}^3$ *est l'unique vecteur* w *de* $\mathbb{R}^3$*, noté* $w = u\Lambda v$ *tel que :*
i) $w \perp u$ *et* $w \perp v$*.*
ii) la base (u, v, w) *est de sens directe.*
iii) $\|w\| = \|u\| . \|v\| . \left|\sin \widehat{(u, v)}\right|$*.*

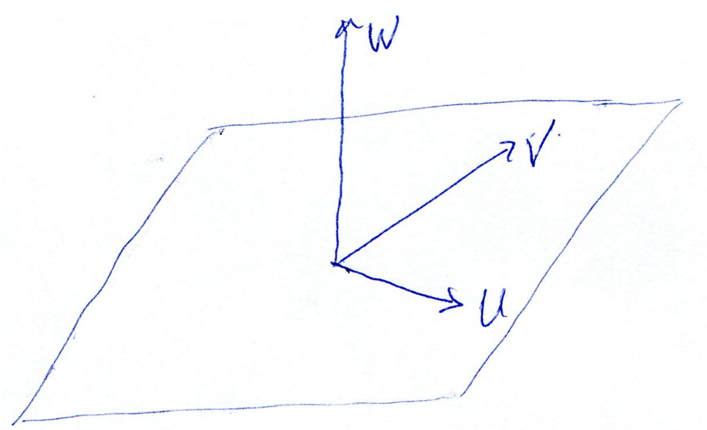

FIGURE 4.1 – Produit vectoriels.

Soit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. On a :

$$w = u\Lambda v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

Propriétés :
1) $u\Lambda(v+w) = u\Lambda v + u\Lambda w$.
2) $\lambda(u\Lambda v) = (\lambda u)\Lambda v + u\Lambda(\lambda v)$.
3) $u\Lambda v = -v\Lambda u$.
4) $(u\Lambda v)' = u'\Lambda v + u\Lambda v'$.

4.2.2 Binormale

Définition 4.7. *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière et soit $p = \gamma(s)$ un point birégulier de γ.*
Le vecteur $B(s) = T(s)\Lambda N(s)$ est dite la binormale à γ au point p où $T(s)$ est le vecteur unitaire tangent à la courbe au pointp et $N(s)$ est la normale principale.
Le repère orthonormé $(p, T(s), N(s), B(s))$ est le repère de Frenet de la courbe γ au point p.

4.2.3 Torsion d'une courbe

Proposition 4.8. *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée normale de classe C^3 et soit $p = \gamma(s)$ un point birégulier de γ. Alors il existe une application continue $\tau : I \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\forall s \in I, B'(s) = \tau(s).N(s)$$

D'après cette proposition, le vecteur $B'(s)$ est colinéaire à $N(s)$ au point p.

Preuve .
On a

$$\forall s \in I, B(s).B(s) = \|B(s)\|^2 = 1 \tag{4.1}$$

On obtient après dérivation,

$$\forall s \in I, B'(s).T(s) + B(s).T'(s) = 0 \tag{4.2}$$

Or

$$T'(s) = K(s).N(s)$$

Donc d'après (4.2),

$$\forall s \in I, B'(s).T(s) + K(s).B(s).N(s) = 0$$

C'est-à-dire,

$$\forall s \in I, B'(s).T(s) = 0$$

puisque, comme $B \perp N$, alors $B(s).N(s) = 0$. Ainsi, $B'(s) \perp T(s)$ et d'après (4.1), $B'(s) \perp T(s)$. Donc $B'(s)$ est colinéaire à $N(s)$. D'où,

$$\exists \tau : I \to \mathbb{R}, \forall s \in I, B'(s) = \tau(s).N(s) \tag{4.3}$$

Lacontinuité de τ découle de celle du produit scalaire,

$$\tau(s) = B'(s).N(s)$$

qui s'obtient à partir de (4.3) en multipliant les deux membres de l'égalité par $N(s)$.

Définition 4.9. *On appelle $\tau(s) = B'(s).N(s)$ la torsion d'une courbe γ paramétrée par abscisse curviligne, en un point $p = \gamma(s)$.*

Interprétation géométrique :

Le vecteur B' indique les variations de B.

Comme $B'(s) = \tau(s).N(s)$, donc la torsion également indique les variations de B. Or $B \perp \langle T, N \rangle$, donc la torsion indique comment tourne ce plan en fonction de l'abscisse curviligne (γ paramétrée par abscisse curviligne). Ceci signifie que τ mesure le défaut de planéité de la courbe.

Proposition 4.10. *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière de classe C^3 dont tous ses points biréguliers. Alors,*

$$\textit{la courbe } \gamma \textit{ est plane } \Leftrightarrow \forall s \in I, \tau(s) = 0$$

Preuve.

$\Leftarrow$) : Supposons que

$$\forall s \in I, \tau(s) = 0$$

C'est-à-dire

$$\forall s \in I, B'(s) = 0$$

Donc

$$\forall s \in I, B(s) = \text{constante}$$

Comme

$$B = T \Lambda N$$

alors T est orthogonale à un vecteur constant (qui est B). Ceci signifie que la courbe est plane.

$\Rightarrow$) : Supposons que la courbe γ est plane. Donc $B' = 0$ (B ne varie pas). C'est-à-dire, $\tau = 0$.

4.2.4 Formules de Frenet

Proposition 4.11. *Soit* $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ *une courbe paramétrée normale, régulière et de classe* C^3 *et soit* $p = \gamma(s)$ *un point birégulier de* γ*. Alors*

$$\forall s \in I, \begin{cases} \textit{1)}\ T'(s) = K(s).N(s) \\ \textit{2)}\ N'(s) = -K(s).T(s) - \tau(s).B(s) \\ \textit{3)}\ B'(s) = \tau(s).N(s) \end{cases}$$

Preuve.
2) On a

$$N(s) = B(s)\Lambda T(s)$$

Après dérivation, on obtient :

$$\begin{aligned} N'(s) &= (B'(s)\Lambda T(s)) + (B(s)\Lambda T'(s)) \\ &= ((\tau(s).N(s))\Lambda T(s)) + (B(s)\Lambda(K(s).N(s))) \\ &= \tau(s).(-B(s) + K(s).(-T(s))) \\ &= -\tau(s).B(s) - K(s).T(s) \end{aligned}$$

Chapitre 5

Surfaces Paramétrées

Définition 5.1. *Une surface paramétrée de classe C^k $(k \geq 1)$ est une aplication $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^k, où U est un domaine (un ouvert connexe) de $\mathbb{R}^2$.*
L'ensemble $S = f(U) = \{f(x,y), (x,y) \in U\}$ est dit support géométrique de la surface f.

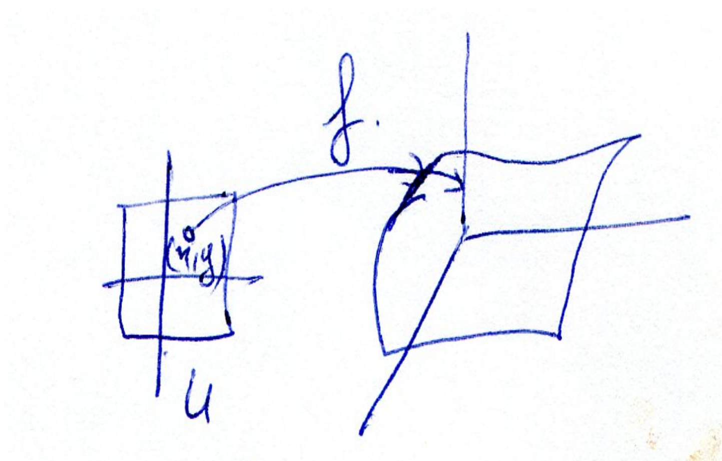

FIGURE 5.1 – Support géométrique d'une surface.

5.1 Reparamétrisation

Proposition 5.2. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée de classe C^1 et soit $\varphi : V \subset \mathbb{R}^2 \to U$ un C^1-difféomorphisme. Alors l'application*

$f \circ \varphi : V \to \mathbb{R}^3$ est aussi une surface paramétrée de même support géométrique que f.
L'application φ est un changement de variables admissible et $f \circ \varphi$ est une reparamétrisation de f.

5.2 Espace tangent

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée de classe C^1 et soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to U$ une courbe paramétrée.

L'application $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^3$ est une courbe paramétrée.

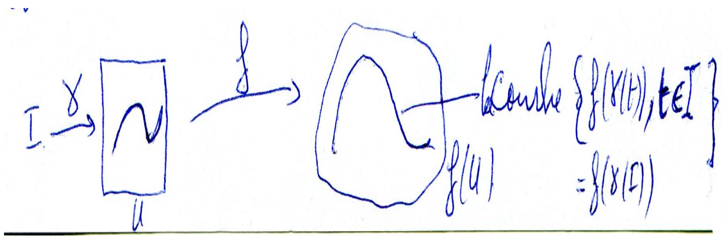

FIGURE 5.2 – Passage d'une courbe paramétrée à une autre par une application.

Soit maintenant I_1 et I_2 deux intervalles de $\mathbb{R}$ tel que $I_1 \times I_2 \subset U$ et soit $M = (x_0, y_0) \in I_1 \times I_2$.

Soit les deux courbes paramétrées

$$\begin{gathered} F_{x_0} : I_2 \to f(U) \\ y \mapsto F_{x_0}(y) = f(x_0, y) \end{gathered}$$

et

$$\begin{gathered} F_{y_0} : I_1 \to f(U) \\ x \mapsto F_{y_0}(x) = f(x, y_0) \end{gathered}$$

Si F_{x_0} et F_{y_0} sont régulières en y_0 et en x_0 respectivement, alors les vecteurs $F'_{x_0}(y_0)$ et $F'_{y_0}(x_0)$ sont tangents aux courbes F_{x_0} et F_{y_0} respectivement au point M.

D'autre part,

$$F'_{x_0}(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(M)$$

et

$$F'_{y_0}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M)$$

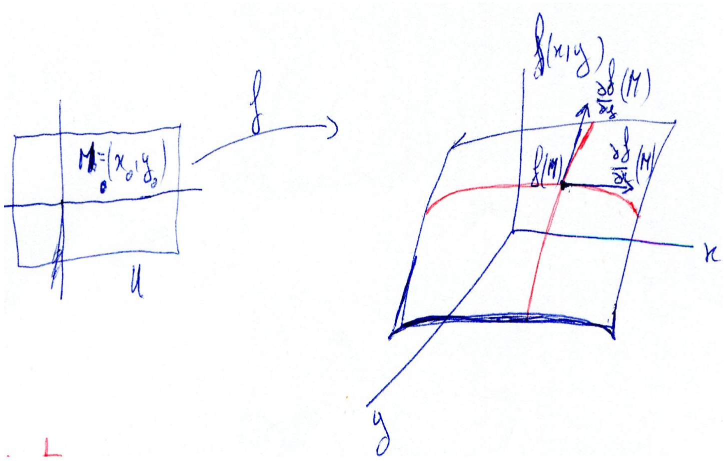

FIGURE 5.3 – Espace tangent à une surface.

Définition 5.3. *L'espace tangent à une surface paramétrée $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ au point $f(M)$ est l'espace*

$$T_{f(M)}S = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M) \right\rangle$$

La surface paramétrée est dire régulière au point M si $\frac{\partial f}{\partial x}(M)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(M)$ sont linéairement indépendants. Elle est dite régulière si elle est régulière en chaque point.

5.3 Longueur et arcs

Proposition-Définition : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée et régulière de classe C^1. Alors,

$$A = \int_U \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \Lambda \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right\| dudv$$

est indépendant de la paramétrisation.
L'ensemble A est dit l'aire de la surface $S = f(U)$.

5.4 Allure locale d'une surface

Une surface peut être paramétrée localement par une application $f(x,y) = (x, y, \varphi(x,y))$ (théorème des fonctions implicies), où $\varphi : U \to \mathbb{R}$ est une application.

Sans pèrte de généralités, supposons que $\varphi(0,0) = D_\varphi(0,0) = 0$. On a,

$$
\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \frac{1}{2} D_\varphi^2(0,0)(x,y)^2 + o\,\|(x,y)\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(0,0)\,x^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(0,0)\,y^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}(0,0)\,xy\right] + o\,\|(x,y)\|^2
\end{aligned}
$$

Ainsi, $D_\varphi^2(0,0)(x,y)^2$ donne des informations sur l'allure de la surface de $(0,0,0)$.

Définition 5.4. *On appelle $D_\varphi^2(0,0)(x,y)^2$ la deuxième forme fondamentale de Frenet.*