Université A. Mira, Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques /M.I

2019/2020

L2 *Mathématiques*

Géométrie - Série de TD N° 1

Exercice 1. *On considère la courbe paramétrée*

$$F: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \left(\dfrac{t}{1+t^4}, \dfrac{t^3}{1+t^4}\right) \end{array}$$

– *Que déduit-on du changement de variables* $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ *?*

– *Sur quel intervalle peut-on réduire l'étude de* F *?*

– *Tracer la courbe de* F.

Exercice 2. *Tracer les courbes paramétrées des fonctions*

$$F_1: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t) \end{array}, \qquad F_2: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \left(e^{\sin(2t)}, e^{\cos t}\right) \end{array}$$

– *Préciser le point double pour* F_2.

Exercice 3. *On considère la courbe paramétrée* γ *donnée par*

$$\begin{cases} x(t) = 1 - \dfrac{t^2}{2} \\ y(t) = t \end{cases}$$

Tracer la courbe γ.

Exercice 4. *On considère la courbe paramétree donnée par* $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *telle que,*

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{(t-1)^3}{3} \\ y(t) = \dfrac{(t-1)^5}{24} \end{cases}$$

Tracer la courbe γ.

Exercice 5. *Etudier et tracer les courbes d'équations cartésiennes suivantes :*

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\exp(-1/t)}{t^2} \\ y(t) = \dfrac{\exp(-1/t)}{t} \end{cases}, \qquad \begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \\ y(t) = \dfrac{2t}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$

Exercice 6. *Soit la courbe paramétrée γ donnée par*

$$\begin{cases} x(t) = (4\cos^2 t + 5)\sin t \\ y(t) = (4\sin^2 t - 1)\cos t \end{cases}$$

1) Calculer la longueur d'arc l entre les points de paramètre 0 et $\pi/4$.

2) Déterminer les paramètres des points stationnaires de la courbe γ.

3) Indiquer par quel moyen peut-on ramener le tracé de la courbe γ a celui de l'arc γ' des points de paramètres $t \in [0, \pi/2]$.

4) quels sont les points stationnaires de l'arc γ' ; quelles sont leurs natures.

5) Tracer la courbe γ'.

6) En déduire le tracé de la courbe γ.

Exercice 7. *On considère la courbe paramétré C définie en coordonnées polaires par*

$$\rho\left(\theta\right) = \cos 2\theta + \cos^2 \theta$$

1. *Etudier la périodicité de ρ.*
2. *Quelle est la parité de ρ.*
3. *Pour quelle valeur de $\theta_0 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ a-t-on $\rho(\theta_0) = 0$?*
4. *Dresser le tableau de signe de ρ sur l'intervalles $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.*
5. *Tracer la courbe C.*

Exercice 8. *Tracer la courbe paramétrée en coordonées polaires donnée par $\rho\left(\theta\right) = 3\theta$.*

Exercice 9. *1) Etudier et tracer la courbe paramétrée définie en coordonnées polaires par :*

$$\rho\left(\theta\right) = \tanh\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

2) Déterminer la longueur de la partie de cette courbe telle que $\theta \in [0, \alpha]$, où α est un réel strictement positif.

Rappel : $\tanh\left(x\right) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ *et* $\tanh'\left(x\right) = 1 - \left(\tanh\left(x\right)\right)^2.$