

Géométrie - Série de TD N° 2

Exercice 1. Calculer la longueur de la courbe de paramétrage

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Exercice 2. Déterminer la longueur de la courbe d'équations

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos \theta (1 + \cos \theta) \\ y(\theta) = \sin \theta (1 + \cos \theta) \end{cases}$$

Exercice 3. Calculer la longueur de la boucle de la courbe de paramétrage

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 - 1 \\ y(t) = 3t^3 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Exercice 4. Donner un paramétrage normal du cercle de centre l'origine et de rayon $R > 0$.

Exercice 5. Soit γ une courbe plane paramétrée par abscisse curviligne régulières de classe \mathcal{C}^2 à courbure constante. Montrer que cette courbe est un arc d'un cercle.

Exercice 6. Soient R et a deux nombres réels. On considère la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{aligned} \gamma : \quad \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (R \cos t, R \sin t, at) \end{aligned}$$

1. Que représente géométriquement cette courbe ?
2. Déterminer une paramétrisation par abscisse curviligne.
3. Calculer le repère de Frenet.
4. Calculer la courbure \mathcal{K}_a de γ en tout point.
5. Calculer la torsion τ_a de γ en tout point ?
6. Calculer les limites

$$\lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{K}_a \text{ et } \lim_{a \rightarrow 0} \tau_a$$