جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques /M.I
Première année M.I

2019/2020

Série de TD N 1 d'Algèbre 2

Exercice 1. 1. On définit sur $\mathbb{R}^2$ les lois $(+)$ et $(\cdot)$. Dans chacun des cas, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel?

a) $(+) : (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $(\cdot) : \lambda(x, y) = (x, 0)$.

b) $(+) : (x, y) + (x', y') = (x + y, x + y + x' + y')$ et $(\cdot) : \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.

2. Sur $\mathbb{E} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on définit une loi interne $(+)$ et une loi externe $(\cdot)$ par:
$(+) : (x, y) + (x', y') = (xx', y + y')$ et $\lambda \cdot (x, y) = (x^\lambda, \lambda y)$.
Montrer que $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3. Parmi les ensembles suivants, quels sont ceux qui sont des sous-espaces vectoriels?

a) $\mathbf{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + a = 0, \text{ et } x + 3az = 0, \ a \in \mathbb{R}\}$.

b) $\mathbf{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x - y^2 = 0\}$. **c)** $\mathbf{C} = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 : \ x, y \in \mathbb{R}\}$.

d) $\mathbf{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. **e)** $\mathbf{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ e^x e^y = 0\}$.

f) $\mathbf{F} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ croissante}\}$.

Exercice 2. On considère le $\mathbb{R}$-espace vecroriel $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

1. Soit $\mathbb{F}_{(a,b)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + az = b^2 - 4\}$, où a et b sont deux nombres réels. Déterminer pour quelles valeurs de a et b $(\mathbb{F}_{(a,b)}, +, \cdot)$ est-il un sous espace-vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

2. Soit $\mathbb{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$ un sous espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

a) Déterminer une base de $\mathbb{F}$.

b) Compléter la base de $\mathbb{F}$ pour avoir une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Trouver les coordonnées du vecteur $X = (1, 1, 1)$ dans cette nouvelle base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^4$, soit les vecteurs suivants:
$u = (1, -1, 0, 2), \ x = (1, 2, 3, 0), \ y = (0, -1, 2, -2), \ z = (3, 7, 7, 2), \ v = (0, -9, -9, 6)$.

1. Montrer que $z \in < x, y >$ et $v \in < x, u >$.

2. Soit $\mathbf{F} =< x, y, z >$ et $\mathbf{G} =< u, v >$. Trouver la dimension des sous-espaces vectoriels $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{F} + \mathbf{G}$ et $\mathbf{F} \cap \mathbf{G}$.

3. Montrer que le sous espace $\mathbf{H} =< (1, 2, 3, 1) >$ est supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ de $\mathbf{F} + \mathbf{G}$. En déduire celui de $\mathbf{F} \cap \mathbf{G}$.

Exercice 4. Soit $\mathbf{E} = \triangle(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble de fonctions dérivables. Considérons les ensembles suivants:
$\mathbf{F} = \{f \in \mathbf{E} : f(0) = f'(0) = 0\}$ et $\mathbf{G} = \{f \in \mathbf{E} : f(x) = ax + b, \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
Montrer que $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathbf{E}$ et supplémentaires dans $\mathbf{E}$.