Université A. Mira – Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques /M.I

2019/2020

Algèbre 2 - TD N^{0}3

Exercice 1. *On considère l'application linéaire* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par:*

$$f(x, y, z) = (x + y - z, x - y + 2z)$$

1. Donner la matrice associée à f *relativement aux bases canoniques* $\mathbb{B}_c(\mathbb{R}^3)$ *et* $\mathbb{B}_c(\mathbb{R}^2)$.

2. Montrer qu'il existe des vecteurs u_1, u_2, u_3 *de* $\mathbb{R}^3$ *tels que* $f(u_1) = (0, 0)$, $f(u_2) = (1, 0)$ *et* $f(u_3) = (0, 1)$ *(avec* $u_1 \neq (0, 0, 0)$*).*

Vérifier que $\mathbb{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$*, puis déterminer* $Mat(f, \mathbb{B}', \mathbb{B}_c(\mathbb{R}^2))$.

3. Vérifier que $\mathbb{B}'' = ((1, 1), (1, -1))$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$*, puis déterminer* $(Mat(f, \mathbb{B}_c(\mathbb{R}^3), \mathbb{B}''))$.

4. Déterminer $(Mat(f, \mathbb{B}', \mathbb{B}''))$.

Exercice 2. *1) Calculer les produits suivants*

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2) Soit φ *une application linéaire de* E *muni de la base* $\mathbb{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ *vers* F *muni de la base* $\mathbb{B}_2 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ *la matrice associée à* φ *relativement à* $\mathbb{B}_1$ *et* $\mathbb{B}_2$.

Soit $\mathbb{B}'_1 = (e'_1, e'_2, e'_3)$ *et* $\mathbb{B}'_2 = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2)$ *avec*

$$e'_1 = e_2 + e_3 \ ; \ e'_2 = e_3 + e_1 \ ; \ e'_3 = e_1 + e_2 \ ; \ \varepsilon'_1 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ ; \ \varepsilon'_2 = 5\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2$$

a. Montrer $\mathbb{B}'_1$ *que est une base de* E *et* $\mathbb{B}'_2$ *est une base de* F.

b. Déterminer les matrices de passage P *de* $\mathbb{B}_1$ *à* $\mathbb{B}'_1$*et* Q *de* $\mathbb{B}_2$ *à* $\mathbb{B}'_2$

c. Déterminer la matrice associée à φ *relativement à* $\mathbb{B}'_1$ *et* $\mathbb{B}_2$

d. Déterminer la matrice associée à φ *relativement à* $\mathbb{B}'_1$ *et* $\mathbb{B}'_2$

Exercice 3. *On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathbb{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par*

$$f(e_1) = (1, 0, 2)\ ;\ f(e_2) = (0, -1, 0)\ ;\ f(e_3) = (2, 0, 1)$$

1. Donner la matrice A associée à f relativement à $\mathbb{B}$.
2. En déduire la matrice associée à $(f \circ f)$ relativement à $\mathbb{B}$ et son expression.
3. Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice associée à f^{-1} relativement à $\mathbb{B}$.
5. Soit $\mathbb{B}' = \{(0, 1, 0); (-1, 0, 1); (1, 0, 1)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de passage P de $\mathbb{B}$ à $\mathbb{B}'$ et calculer P^{-1}.
6. Déterminer la matrice A' associée à f relativement à $\mathbb{B}'$.
7. Exprimer A^n, pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4. *Calculer le rang des matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad et\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles inversibles ?

Exercice 5. ***I)*** *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que f est bijective.
2) Déduire que A est inversible. Calculer A^{-1}.
II) *Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par*

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ & P = a + bX + cX^2 \mapsto (a-b) + (b-a)X + 2cX^2 \end{aligned}$$

1) Déterminer la matrice M associée à φ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, $B = (1, X, X^2)$.
2) Soit $B' = (P_1 = 1 + X, P_2 = X^2, P_3 = -1 + X)$.
Montrer que B' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3) Ecrire la matrice N de φ relativement à la nouvelle base B'.
4) Montrer sans faire les calculs que $N = A^{-1}MA$.
5) Déduire la relation : $M^n = AN^nA^{-1}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer M^n.