TD 3

Solution Exo 1

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x+y-z,\ x-y+2z)$$

$B_c(\mathbb{R}^3) = \{e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)\}$.

$B_c(\mathbb{R}^2) = \{e'_1=(1,0),\ e'_2=(0,1)\}$.

1) La matrice associée a f relativement aux bases $B_c(\mathbb{R}^3)$ et $B_c(\mathbb{R}^2)$

$A = Mat(f, B_c(\mathbb{R}^3), B_c(\mathbb{R}^2))$.

$f(e_1) = (1,1) = 1e'_1 + 1e'_2$

$f(e_2) = (1,-1) = 1e'_1 - e'_2$

$f(e_3) = (-1,2) = -e'_1 + 2e'_2$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \end{array} \end{array}$$

2) L'existence des vecteurs U_1, U_2 et U_3 tq :

$f(U_1) = (0,0)$, $f(U_2) = (1,0)$, $f(U_3) = (0,1)$. $/ U_1 \neq (0,0,0)$.

$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) = (0,0)\}$

$$f(x,y,z) = (0,0) \iff \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-3x \\ z=-2x \\ x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$\ker f = \{x(1,-3,-2) \ / x \in \mathbb{R}\}$

$\ker f = \langle (1,-3,-2) \rangle$

donc $\ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ alors il existe $U_1 \neq (0,0,0)$ tq

$$f(U_1) = (0,0).$$

On a : $\dim \ker f = 1$ et d'après le Th du rang
$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$ alors
$\dim \operatorname{Im} f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ et $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^2$ donc
$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ d'où f est surjective.

On a : $(1,0) \in \mathbb{R}^2$ et f est surjective $\Rightarrow \exists U_2 \in \mathbb{R}^2 / f(U_2) = (1,0)$
et $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ et f surjective $\Rightarrow \exists U_3 \in \mathbb{R}^2 / f(U_3) = (0,1)$.

* On montre que $B' = (U_1, U_2, U_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
On a $\operatorname{card} B' = 3 = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, donc il suffit de montrer que B' est libre.

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ / $\alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma U_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ ... $(*)$
$f(\alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma U_3) = f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^2}$ (car f est linéaire)
$\alpha f(U_1) + \beta f(U_2) + \gamma f(U_3) = 0_{\mathbb{R}^2}$
$\alpha(0,0) + \beta(1,0) + \gamma(0,1) = (0,0) \Rightarrow \beta = \gamma = 0$.
dans $(*)$ on aura :
$\alpha U_1 = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $U_1 \neq (0,0,0)$ donc $\alpha = 0$
d'où $B' = (U_1, U_2, U_3)$ est libre donc est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $A' = \operatorname{Mat}(f, B', B_c(\mathbb{R}^2))$.
<u>On a</u> : $f(U_1) = (0,0) = 0e_1' + 0e_2'$
$f(U_2) = (1,0) = 1e_1' + 0e_2'$
$f(U_3) = (0,1) = 0e_1' + 1e_2'$

$$A' = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(U_1) & f(U_2) & f(U_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1' \\ e_2' \end{array} \end{array}$$

3) $B'' = (v_1 = (1,1), v_2 = (1,-1))$

B'' est une base de $\mathbb{R}^2$.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, card $B'' = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, donc il suffit de vérifier que B'' est libre

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

d'où B'' est libre donc B'' est une base de $\mathbb{R}^2$.

soit $A'' = Mat(f, B_c(\mathbb{R}^3), B'')$

On a $f(e_1) = (1,1) = 1v_1 + 0v_2$.

$f(e_2) = (1,-1) = 0v_1 + 1v_2$.

$f(e_3) = (-1,2) = \frac{1}{2}v_1 - \frac{3}{2}v_2$.

$$A'' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array}.$$

4) soit $A_1 = Mat(f, B', B'')$

$f(u_1) = (0,0) = 0v_1 + 0v_2$.

$f(u_2) = (1,0) = \alpha v_1 + \beta v_2 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$.

$f(u_3) = (0,1) = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$.

$$A_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array}.$$