Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

**Faculté des Sciences Exactes**
**Département de Mathématiques /M.I**
**Première année M.I**

**2019/2020**

# Série de TD N 2 d'Algèbre 2

**Exercice 1.** Les applications suivantes sont-elles linéaires?

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, ax-y) \end{array} ; \quad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, y, 4x-y) \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \cos(x+y) \end{array} ; \quad f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}$$

où $\mathbb{R}_3[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à 3.

**Exercice 2.** Déterminer l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(1,1) = 3, \quad f(0,1) = -2$ puis calculer $f(7,4)$

**Exercice 3.** On considère pour $m \in \mathbb{R}$, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont l'image de la base canonique $(e_1, e_2)$ est:

$$f_m(e_1) = (1+m)e_1 + 3e_2; \quad f_m(e_2) = -e_1 + (1-m)e_2.$$

**1.** Déterminer l'expression de $f_m$ .

**2.** Discuter suivant les valeurs de $m$, la dimension de $\ker f_m$. En déduire la dimension de $Imf_m$.

**3.** Dans quel cas $f_m$ est bijective? Dans ce cas calculer $f_m^{-1}$.

**Exercice 4.** Soit $\mathbf{E} = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à 3 et $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ définie par:

$$f(P) = P + (1-X)P'$$

où $P'$ est le polynôme dérivé de $P$.

**1.** Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbf{E}$.

**2.** Déterminer une base de $Imf$ et une base de $\ker f$.

**3.** Montrer que $Imf \oplus \ker f = \mathbf{E}$.

**Exercice 5.** Soit $\mathbf{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi$ un endomorphisme de $\mathbf{E}$ défini par $\varphi(f) = f'$.
Déterminer $\ker \varphi$ et $Im\varphi$. $\varphi$ est-elle injective? Est-elle surjective?