Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques /M.I
Première année M.I

2019/2020

Corrigé de la série TD N 4 d'Algèbre 1

Exercice 1. (Fait en cours avant les vacances)

Exercice 2. Soit $\mathcal{A} = \{m + n\sqrt{6}, \quad m, n \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrons que $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un sous anneau de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$ stable pour la $2^{\text{ème}}$ loi.

On a $\mathcal{A} \neq \emptyset$ car $0 = 0 + 0\sqrt{6} \in \mathcal{A}$.

$\forall\ x = m_1 + n_1\sqrt{6},\ y = m_2 + n_2\sqrt{6} \in \mathcal{A}$

on a: $x - y = (m_1 - m_2) + (n_1 - n_2)\sqrt{6}, \quad m_1 - m_2 \in \mathbb{Z},\ n_1 - n_2 \in \mathbb{Z}$. Donc $x - y \in \mathcal{A}$.

D'autre part on a: $x \cdot y = (m_1 + n_1\sqrt{6})(m_2 + n_2\sqrt{6}) = (m_1m_2 + 6n_1n_2) + (m_1n_2 + m_2n_1)\sqrt{6}$

avec $m_1m_2 + 6n_1n_2 \in \mathbb{Z}$ et $m_1n_2 + m_2n_1 \in \mathbb{Z}$. Donc $x \cdot y \in \mathcal{A}$.

Alors $\mathcal{A}$ est un sous anneau de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

2. Soit l'application

$$\begin{array}{cccc} \phi: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & m + n\sqrt{6} & \longmapsto & m - n\sqrt{6} \end{array}$$

ϕ est un automorphisme de l'anneau $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \phi$ endomorphisme de l'anneau $\mathcal{A}$ et bijectif.

ϕ est un en endomorphisme de $\mathcal{A}$. En effet $\forall\ x = m_1 + n_1\sqrt{6},\ y = m_2 + n_2\sqrt{6} \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} \phi(x + y) &= \phi[(m_1 + m_2) + (n_1 + n_2)\sqrt{6}] \\ &= (m_1 + m_2) - (n_1 + n_2)\sqrt{6} \\ &= (m_1 - n_1\sqrt{6}) + (m_2 - n_2\sqrt{6}) \\ &= \phi(x) + \phi(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(x \cdot y) &= \phi[(m_1 + n_1\sqrt{6}) \cdot (m_2 + n_2\sqrt{6})] \\ &= \phi[(m_1m_2 + 6n_1n_2) + (m_1n_2 + m_2n_1)\sqrt{6}] \\ &= (m_1m_2 + 6n_1n_2) - (m_1n_2 + m_2n_1)\sqrt{6} \\ &= (m_1 - n_1\sqrt{6}) \cdot (m_2 - n_2\sqrt{6} \\ &= \phi(x) \cdot \phi(y). \end{aligned}$$

ϕ est injective car $\phi^{-1}(\{0_{\mathcal{A}}\}) = \{0_{\mathcal{A}}\}$.

ϕ est surjective car $\forall\ y = a + b\sqrt{6} \in \mathcal{A},\ \exists\ x = m + n\sqrt{6} \in \mathcal{A} : y = \phi(x)$

Alors $a+b\sqrt{6}=m-n\sqrt{6}$. Il suffit de prendre $x=a-b\sqrt{6}$.

3. Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} N: & (\mathcal{A},+,\cdot) & \longrightarrow & (\mathbb{Z},+,\cdot) \\ & x & \longmapsto & x\phi(x) \end{array}$$

$\forall x,y\in\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{rcl} N(x\cdot y) & = & xy\phi(x.y) \\ & = & xy\phi(x)\phi(y) \\ & = & x\phi(x).y\phi(y) \\ & = & N(x).N(y). \end{array}$$

4. Montrons que: x est un élément inversible de $\mathcal{A}\Leftrightarrow N(x)=\pm 1$.

Soit $x=m+n\sqrt{6}$

Supposons que x est inversible, d'inverse y alors $N(x\cdot y)=N(1)=1$ donc $N(x)\cdot N(y)=1$ et puisque $N(x),\ N(y)\in\mathbb{Z}$, on a nécessairement $N(x)=\pm 1$.

Réciproquement, Si $N(x)=\pm 1$ alors en utilisant le conjugué:

$\frac{1}{m+n\sqrt{6}}=\frac{m-n\sqrt{6}}{m^2-6n^2}=\frac{m-n\sqrt{6}}{N(x)}\in\mathcal{A}$.

D'où $m+n\sqrt{6}$ est inversible son inverse est $\begin{cases} m-n\sqrt{6}, & \text{si } N(x)=1; \\ -(m-n\sqrt{6}), & \text{si } N(x)=-1. \end{cases}$

5. $N(5+2\sqrt{6})=(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})=25-24=1$.

Donc d'après la question précédente, $5+2\sqrt{6}$ est inversible, d'inverse $(5-2\sqrt{6})$.

Exercice 3. I) Soit $f:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ un morphisme d'anneaux.

Montrons que si J est un idéal de $\mathcal{B}$ alors $f^{-1}(J)$ est un ideal de $\mathcal{A}$.

Ceci revient à montrer que $f^{-1}(J)$ est un sous groupe de $\mathcal{A}$, stable pour la multiplication à gauche et droite par un élément quelconque de $\mathcal{A}$.

- on a: $0_{\mathcal{B}}=f(0_{\mathbf{A}})\in J\Longrightarrow 0_{\mathbf{A}}\in f^{-1}(J)$. Alors $f^{-1}(J)\neq\emptyset$.

- $$\begin{array}{rcl} \forall x_1,x_2\in f^{-1}(J) & \Longrightarrow & f(x_1),\ f(x_2)\in J \\ & \Longrightarrow & f(x_1)-f(x_2)\in J \text{ (car } J \text{ est un sous groupe de } \mathcal{B}) \\ & \Longrightarrow & f(x_1)+f(-x_2)\in J \text{ (car } f(-x_2)=-f(x_2)) \\ & \Longrightarrow & f(x_1-x_2)\in J \text{ car } f \text{ est un homomorphisme} \\ & \Longrightarrow & x_1-x_2\in f^{-1}(J) \end{array}$$

  Donc $f^{-1}(J)$ est un sous groupe de $(\mathbf{A},+)$.

- Soit $a\in\mathbf{A},\ x\in f^{-1}(J)$

  On a : $f(ax)=f(a)f(x)\in J$ et $f(xa)=f(x)f(a)$ car J est un idéal de $\mathbf{B}$.

  Donc $ax\in f^{-1}(J)$ et $xa\in f^{-1}(J)$.

D'où $f^{-1}(J)$ est un idéal de $\mathbf{A}$.

II) On considère l'anneau commutative unitaire $(\mathbb{R}^2, +, \star)$ pour les lois suivantes

$$(x, y) + (x', y') = (x + x',\ y + y')$$

$$(x, y) \star (x', y') = (xx' + \lambda yy',\ xy' + yx'), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Valeurs de λ, pour lesquelles cet anneau est intègre:

On a : $(0, 0)$ est l'élément neutre du groupe additif $(\mathbb{R}^2, +)$.

$(\mathbb{R}^2, +, \star)$ est intégre si $(x, y) \star (x', y') = (0, 0) \Longrightarrow (x, y) = (0, 0)$ ou $(x', y') = (0, 0)$.

Supposons $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$(xx' + \lambda yy',\ xy' + yx') = (0, 0) \Longrightarrow \begin{cases} xx' + \lambda yy' = 0 \\ xy' + yx' = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} yxx' + \lambda y^2 y' = 0 \ \ldots (1) \\ x^2 y' + yxx' = 0 \quad \ldots (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) - (2) \quad &\Longrightarrow \quad \lambda y^2 y' - x^2 - x^2 = 0 \\ &\Longrightarrow \quad y'(\lambda y^2 - x^2) = 0 \end{aligned}$$

- Si $\lambda < 0$:
  $-y'(-\lambda y^2 + x^2) = 0 \Longrightarrow -y'(|\lambda| y^2 + x^2) = 0.$
  Comme $|\lambda| y^2 + x^2 > 0$ alors $y' = 0 \Longrightarrow x' = 0$. Donc l'anneau est intègre.

- Si $\lambda > 0$
  $$y'(\lambda y^2 - x^2) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda y^2 = x^2 \\ y' = 0 \end{cases}$$
  On prend $(x, y) = (\sqrt{\lambda}, 1) \neq (0, 0)$
  $(x', y') = (-\sqrt{\lambda}, 1) \neq (0, 0)$
  mais $(x, y) \star (x', y') = (0, 0)$. Donc l'anneau n'est pas intègre.

- Si $\lambda = 0$
  $$\begin{cases} xx' = 0 \\ xy' + yx' = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ ou } (x', y') = (0, 0).$$ Donc l'anneau est intègre.

Conclusion: l'anneau est intègre pour $\lambda \leq 0$.

2. D'après la question précédente on en déduit que l'anneau n'est pas un corps car sinon il serait un intègre $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$.