Université A. Mira de Béjaia

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Premi`re année Mathématiques et Informatique

Algèbre 2

Année universitaire 2019-2020

Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Corrigé de la série de TD $N°$2

Exercice 1

Déterminons si les applications suivantes sont linéaires ?

1. L'application

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto f_1(x, y) = (2x + y, ax - y). \end{aligned}$$

$$f_1 \text{ est linéaire } \iff [\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall X = (x, y), Y = (x', y') \in \mathbb{R}^2,\ f_1(\alpha X + \beta Y) = \alpha f_1(X) + \beta f_1(Y)]$$

$$\begin{aligned} f_1(\alpha X + \beta Y) &= f_1(\alpha(x, y) + \beta(x', y') \\ &= f_1(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') = (2(\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y'), a(\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y')). \\ &= (2\alpha x + 2\beta x' + \alpha y + \beta y', \alpha a x + \beta a x' - \alpha y - \beta y') \\ &= (\alpha(2x + y) + \beta(2x' + y'), \alpha(ax - y) + \beta(ax' - y')) \\ &= (\alpha(2x + y), \alpha(ax - y)) + (\beta(2x' + y'), \beta(ax' - y')) \\ &= \alpha(2x + y, ax - y) + \beta(2x' + y', ax' - y') = \alpha f_1(x, y) + \beta f_1(x', y') \\ &= \alpha f_1(X) + \beta f_1(Y). \end{aligned}$$

   D'où f_1 est linéaire.

2.

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto f_2(x, y) = (x + y, y, 4x - y). \end{aligned}$$

$$f_2 \text{ est linéaire } \iff [\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall X = (x, y), Y = (x', y') \in \mathbb{R}^2,\ f_2(\alpha X + \beta Y) = \alpha f_2(X) + \beta f_2(Y)]$$

$$\begin{aligned} f_2(\alpha X + \beta Y) &= f_2(\alpha(x, y) + \beta(x', y') \\ &= f_2(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') = (\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y'), \alpha y + \beta y', 4(\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y')). \\ &= (\alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y', \alpha y + \beta y', \alpha 4x + \beta 4x' - \alpha y - \beta y') \\ &= (\alpha(x + y) + \beta(x' + y'), \alpha y + \beta y', \alpha(4x - y) + \beta(4x' - y')) \\ &= (\alpha(x + y), \alpha y, \alpha(4x - y)) + (\beta(4x' + y'), \beta y', \beta(4x' - y')) \\ &= \alpha(x + y, y, 4x - y) + \beta(x' + y', y', 4x' - y') = \alpha f_2(x, y) + \beta f_2(x', y') \\ &= \alpha f_2(X) + \beta f_2(Y). \end{aligned}$$

   D'où f_2 est linéaire.

3.

$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f_3(x, y) = \cos(x + y). \end{aligned}$$

On remarque que l'image de l'élément neutre de $\mathbb{R}^2$ n'est pas égale à lélément neutre de $\mathbb{R}$.

$$f_3(0_{\mathbb{R}^2}) = f_3(0,0) = \cos(0+0) = 1 \neq 0.$$

D'où f_3 n'est pas linéaire.

4.

$$\begin{aligned} f_4 : \mathbb{R}_3[x] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P &\longmapsto f_4(P) = (P(-1), P(0), P(1)). \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_3[X] &= \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \deg(P) \leqslant 3\} \\ &= \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$\mathbb{R}_3[X]$ est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$. avec la loi interne définie par $(P + Q)(X) = P(X) + Q(X)$ et la loi externe définie par $(\alpha P)(X) = \alpha P(X)$.

$$f_4 \text{est linéaire} \iff [\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X],\ f_4(\alpha P + \beta Q) = \alpha f_4(P) + \beta f_4(Q)]$$

$$\begin{aligned} f_4(\alpha P + \beta Q) &= ((\alpha P + \beta Q)(-1), (\alpha P + \beta Q)(0), (\alpha P + \beta Q)(1)) \\ &= (\alpha P(-1) + \beta Q(-1), \alpha P(0) + \beta Q(0), \alpha P(1) + \beta Q(1)) \\ &= (\alpha P(-1), \alpha P(0), \alpha P(1)) + (\beta Q(-1), \beta Q(0), \beta Q(1)) \\ &= \alpha(P(-1), P(0), P(1)) + \beta(P(-1), P(0), P(1)) = \alpha f_4(P) + \beta f_4(Q). \end{aligned}$$

D'où f_4 est linéaire.

Exercice 2

Déterminons l'application linéaire

$$f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

qui vérifie $f(1,1) = 3$ et $f(0,1) = -2$.
On a vu dans le cours qu'une application linéraire est complétement déterminée si on connait les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ. Soit $B = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. on a

$$\forall X \in \mathbb{R}^2, X = xe_1 + ye_2 = x(1,0) + y(0,1) = (x, y).$$

$f(x, y) = f(x(1,0) + y(01)) = xf(1,0) + yf(0,1)$ on a $f(0,1) = -2$ calculons $f(1,0)$
Lélément $(1,1)$ s'écrit dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ comme suit :$(1,1) = (1,0) + (0,1)$ et donc

$$(1,0) = (1,1) - (0,1),\ f(1,0) = f(1,1) - f(0,1) = 3 - (-2) = 5.$$

d'où

$$f(x, y) = xf(1,0) + yf(0,1) = 5x - 2y.$$

on trouve donc $f(7,4) = 5.7 - 2.4 = 35 - 8 = 27.$

Exercice 3

f_m un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, défini par

$$f_m(e_1) = (1+m)e_1 + 3e_2, \quad f_m(e_2) = -e_1 + (1-m)e_2.$$

1. L'expression de f_m.
   Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) = xe_1 + ye_2$ (Attention cette écriture est valable seulement dans le cas de la base canonique. Dans le cas général, $(x,y) = \alpha v_1 + \beta v_2$, pour (v_1, v_2) une base quelconque de $\mathbb{R}^2$ et dans le cas d'une base canonique on trouve $\alpha = x$, et $\beta = y$)

$$\begin{aligned} f_m(x,y) &= f_m(xe_1 + ye_2) = xf_m(e_1) + yf_m(e_2) \\ & x[(1+m)e_1 + 3e_2] + y[-e_1 + (1-m)e_2] \\ &= (x(1+m) - y)e_1 + (y(1-m) + 3x)e_2 \\ &= (x(1+m) - y, 3x + y(1-m)). \end{aligned}$$

2. Discussion, selon les valeurs de m, la dimension de $\ker(f_m)$

$$\ker(f_m) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ f_m(x,y) = (0,0)\}.$$

$$\begin{aligned} f_m(x,y) = (0,0) &\iff (x(1+m) - y, 3x + y(1-m)) = (0,0). \\ &\iff \begin{cases} x(1+m) - y = 0 \\ 3x + y(1-m) = 0. \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = x(1+m) \\ 3x + x(1+m)(1-m) = 0. \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = x(1+m) \\ x(4-m^2) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

   On distingue trois cas

   (a) Si $m^2 - 4 \neq 0$, alors $x = y = 0$ et donc $\ker(f_m) = \{(0,0)\}$, alors $\dim(\ker(f_m)) = 0$. et donc d'après la formule des rangs (vue au cours), $\dim(Im(f_m)) = 2$.

   (b) Si $m = 2$, alors $y = 3x$ et donc

$$\begin{aligned} \ker(f_2) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ f_2(x,y) = (0,0)\}. \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 3x\} \\ &= \{(x,3x) \ / \ x \in \mathbb{R}.\} \\ \ker(f_2) &= <(1,3)>. \end{aligned}$$

   et donc $\dim(\ker(f_2) = 1$ et alors $\dim(Im(f_2)) = 1$

   (c) Si $m = -2$, alors $y = -x$ et donc

$$\begin{aligned} \ker(f_{-2}) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ f_{-2}(x,y) = (0,0)\}. \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = -x\} \\ &= \{(x,-x) \ / \ x \in \mathbb{R}.\} \\ \ker(f_{-2}) &= <(1,-1)>. \end{aligned}$$

   et donc $\dim(\ker(f_{-2})) = 1$ et alors $\dim(Im(f_{-2})) = 1$

3. f_m est bijectif si $m^2-4\neq 0$ c'est à dire $m\neq 2$ et $m\neq -2$. Calculons f_m^{-1}

$$
\begin{aligned}
f_m(x,y)=(x',y') &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x'=x(1+m)-y \\ y'=3x+y(1-m). \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=x(1+m)-x' \\ y'=3x+(x(1+m)-x')(1-m). \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=x(1+m)-x' \\ x=\frac{(1-m)x'+y'}{4-m^2}. \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\frac{-3x'+(1-m)y'}{4-m^2} \\ x=\frac{(1-m)x'+y'}{4-m^2}. \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

et donc

$$f_m^{-1}(x,y)=\left(\frac{(1-m)x+y}{4-m^2},\frac{-3x+(1-m)y}{4-m^2}\right).$$

Exercice 4

Soit f

$$f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$$
$$P \longmapsto f(P) = P + (1-X)P'.$$

$E = \mathbb{R}_3[X]$ est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension 4 et de base canonique $C = \{1, X, X^2, X^3\}$,

$$\forall P \in E, \exists a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \ / \ P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$$

1. Montrons que f est un endomorphisme. Montrons que f est bien définie, c'est à dire

$$\forall P \in E, \text{a t-on } f(P) \in E\,?$$

et que f est linéaire. On a pour tout $P \in E$, P s'écrit sous la forme $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$ avec $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3 \in \mathbb{R}$, et donc $P'(X) = a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2$ d'où

$$\begin{aligned} f(P) = P + (1-X)P' &= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + (1-X)(a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2) \\ &= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 - a_1 X - 2a_2 X^2 - 3a_3 X^3 \\ &= (a_0 + a_1) + 2a_2 X + (-a_2 + 3a_3) X^2 - 2a_3 X^3. \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\text{f(P)=(a}_0 + a_1) + a_2(2X - X^2) + a_3(3X^2 - 2X^3) \in E.} \quad (1)$$

Montrons que f est linéaire

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall P, Q \in E, f(\alpha P + \beta Q) \stackrel{?}{=} \alpha f(P) + \beta f(Q).$$

$$\begin{aligned} f(\alpha P + \beta Q) &= (\alpha P + \beta Q) + (1-X)(\alpha P + \beta Q)' \\ &= (\alpha P + \beta Q)(1-X)(\alpha P' + \beta Q') \\ &= \alpha P + \beta Q + \alpha(1-X)P' + \beta(1-X)Q' \\ &= \alpha(P + (1-X)P') + \beta(Q + (1-X)Q') \\ &= \alpha f(P) + \beta f(Q). \end{aligned}$$

D'où f est linéaire.

2. Déterminons une base de $Im(f)$,

$$\begin{aligned} Im(f) &= \{f(P) \ / \ P \in E\} \\ &= \{(a_0 + a_1) + a_2(2X - X^2) + a_3(3X^2 - 2X^3) \ / \ a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \quad \text{de (1)} \end{aligned}$$
$$Im(f) = < 1, 2X - X^2, 3X^2 - 2X^3 > .$$

La famille $(1, 2X - X^2, 3X^2 - 2X^3)$ est libre car chaque polynôme est de degré différent, on déduit que $(1, 2X - X^2, 3X^2 - 2X^3)$ est une base de $Im(f)$, alors $\dim(Im(f)) = 3$.
Déterminons une base de $\ker(f)$.

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \{P \in E \ / \ f(P) = 0\} \\ &= \{P \in E \ / \ P + (1-X)P' = 0\} \end{aligned}$$

$$f(P) = 0 \iff (a_0 + a_1) + a_2(2X - X^2) + a_3(3X^2 - 2X^3) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0. \end{array} \right.$$

d'où

$$\begin{aligned}
\ker(f) &= \{P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \in E \ / \ a_0 + a_1 = 0, a_2 = a_3 = 0\} \\
&= \{a_0(1 - X) \ / \ a_0 \in \mathbb{R}\} \\
\ker(f) &= < 1 - X >
\end{aligned}$$

et donc $\dim(\ker(f)) = 1$.

3. Montrons que $Im(f) \oplus \ker(f) = E$.

   La famille $\left(1, 1 - X, 2X - X^2, 3X^2 - 2X^3\right)$ est une famille génératrice de $Im(f) + \ker(f)$ qui est libre (les degrés de ses éléments sont différents) donc c'est une base de $Im(f) + \ker(f)$.
   d'où

   $$\dim(Im(f) + \ker(f)) = 4 = \dim(E).$$

   Par conséquent $Im(f) \oplus \ker(f) = E$.

Deuxième corrigé de l'exercice 4

Soit $\mathbf{E} = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de $deg\acute{e} \leq 3$.
$f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ définie par : $f(P) = P + (1-X)P'$ avec P' est le polynôme dérivé de P.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{E}$.
   f est bien définie en effet : On a

$$\forall P \in \mathbf{E}, \deg(P) \leq 3 \Longrightarrow \deg(P') \leq 2$$

   $\deg((1-X)P') \leq 1+2 = 3$. D'où $\deg(f(P)) \leq 3$.
   Montrons que f est linéaire :
   Soient $P_1, P_2 \in \mathbf{E}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\alpha P_1 + \beta P_2) &= (\alpha P_1 + \beta P_2) + (1-X)(\alpha P_1' + \beta P_2') \\ &= \alpha(P_1 + (1-X)P_1') + \beta(P_2 + (1-X)P_2') \\ &= \alpha f(P_1) + \beta f(P_2) \end{aligned}$$

   Donc est une application linéaire.

2. Déterminons une base de Imf

$$\forall P \in \mathbf{E} : P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$$

   Soit $\mathbf{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ la base canonique de $\mathbf{E}$.
   Imf est engendrée par $f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)$.
   On a

$$f(1) = f(X) = 1, \;\; f(X^2) = 2X - X^2 \text{ et } f(X^3) = 2X^2 - X^3.$$

   Donc

$$Imf = < f(1), f(X^2), f(X^3) > .$$

   Comme ils sont de degrés différents, donc ils sont L.I. donc forment une base de Imf et $\dim Imf = 3$.
   Déterminons une base de $\ker f$: Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \ker f$

$$\begin{aligned} P \in \ker f &\Longleftrightarrow f(P) = 0 (\text{Polynôme identiquement nul}) \\ &\Longleftrightarrow P + (1-X)P' = 0 \\ &\Longleftrightarrow (a_0 + a_1) + 2a_2X + (-a_2 + 3a_3)X^2 - 2a_3X^3 = 0 \\ &\Longrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 = 0 \\ 2a_2 = 0 \\ -a_2 + 3a_3 = 0 \\ -2a_3 = 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} a_1 = -a_0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

   D'où $P = a_0 - a_0X = a_0(1-X) \Longrightarrow \ker f =< (1-X) >$ et comme $1 - X \neq 0$ donc forme une base de $\ker f$ et $\dim \ker f = 1$.

3. Montrons que $Imf \oplus \ker f = \mathbf{E}$.
   La famille $\{1-X, \; 1, \; 2X - X^2, \; 2X^2 - X^3\}$ est libre
   de plus $\dim \mathbf{E} = 4 = 1 + 3 = \dim(\ker f) + \dim(Imf)$
   Donc $Imf \oplus \ker f = \mathbf{E}$.

Exercice 5

Soit $E = C^{\infty}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \varphi : \ & E \longrightarrow E \\ & f \longmapsto \varphi(f) = f'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ker(\varphi) &= \{f \in E \ / \ f' = 0\} \\ &= \{f \in E \ / \ f = c, \text{avec } c \in \mathbb{R}.\} \end{aligned}$$

d'où $\ker(\varphi) = \mathbb{R}$. alors on déduit que φ n'est pas injective, car $\ker(\varphi) \neq \{0\}$.
Déterminons $Im(\varphi)$.

$$\begin{aligned} Im(\varphi) &= \{\varphi(f) \ / \ f \in E\} \\ &= \{f' \in E \ / \ f \in E\} \end{aligned}$$

Comme toute fonction de clase C^{∞} possède une primitive qui est de classe C^{∞}, alors $Im(\varphi) = E$, d'où φ est surjective.