Université A. Mira de Béjaia

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Premi`re année Mathématiques et Informatique

Algèbre 2

Année universitaire 2019-2020

Corrigé de la série de TD $N°1$

Exercice 1

Partie 1

D'abord avant de définir un espace vectoriel, on doit toujours fixer le corps commutatif $\mathbb{K}$. On dit un espace vectoriel défini sur un corps $\mathbb{K}$ ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ou par abréviation $\mathbb{K}$-ev. Quand le corps est défini d'avance et il n 'y a pas de confusion on dit tout simplement un espace vectoriel sans préciser le corps. Dans notre exercice le corps en question est $(\mathbb{R}, +, .)$ des fois on écrit xy au lieu de $x.y$ La question est de savoir si $(\mathbb{R}^2, +, .)$ est un espace vectoriel défini sur $\mathbb{R}$? avec les deux lois (+) et (.)

Pour que $(\mathbb{R}^2, +, .)$ soit un espace vectoriel il faut et il suffit que

- $(\mathbb{R}^2, +)$ soit un groupe abélien c'est à dire que
  1. $+$ est commutative
  $$(x, y)+(x', y') = (x', y')+(x, y), \forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$$
  2. La loi $+$ est associative c'est à dire
  $$[(x, y)+(x', y')]+(x'', y'') = (x, y)+[(x', y')+(x'', y'')], \forall (x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R}^2$$
  3. L'existence d'élément neutre
  $$\exists (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2, \text{tel que} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y)+(e_1, e_2) = (e_1, e_2)+(x, y) = (x, y).$$
  4. chaque elément de $\mathbb{R}^2$ admet un symétrique par rapport à la loi ,
  $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists (x', y') \in \mathbb{R}^2 \text{tel que} (x, y)+(x', y') = (x', y')+(x, y) = (e_1, e_2)$$
- $\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les quatres propriétés de la loi externes soient vérifiées
  1. $$\alpha.[(x, y)+(x', y')] = \alpha.(x, y)+\alpha.(x', y') \quad (1)$$
  2. $$(\alpha+\beta).(x, y) = \alpha.(x, y)+\beta.(x, y) \quad (2)$$
  3. $$\alpha.(\beta.(x, y)) = (\alpha\beta).(x, y) \quad (3)$$
  4. $$1.(x, y) = (x, y) \quad (4)$$

1. $(\mathbb{R}^2,+,.)$ est -il un espace vectoriel défini sur $\mathbb{R}$? avec les deux lois $(+)$ et $(.)$ définies comme suit :

$$\boxed{+\ : (x,y)+(x',y') = (x+x', y+y'), \lambda(x,y) = (x,0), \forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}.}$$

   On peut vérifier facilement que $(\mathbb{R}^2,+)$ est un groupe abélien d'élément neutre $(0,0)$ et le symétrique de (x,y) par rapport à $+$ est $(-x,-y)$ avec 0 est l'élément neutre du groupe $(\mathbb{R},+)$ et $-x,-y$ le symétrique de x et y par rapport à loi $+$ de $\mathbb{R}$ respectivement. Reste à vérifier les quatres propriétés de la loi externe (1), (2), (3) et (4).
   On remarque que la dernière propriété (4) n'est pas vérifiée,

$$1.(x,y) = (x,0) \neq (x,y),\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

   et donc on déduit que $(\mathbb{R}^2,+,.)$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. $(\mathbb{R}^2,+,.)$ est -il un espace vectoriel défini sur $\mathbb{R}$? avec les deux lois $(+)$ et $(.)$ définies comme suit

$$\boxed{+\ : (x,y)+(x',y') = (x+y, x+y+x'+y'), \lambda.(x,y) = (\lambda x, \lambda y), \forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}.}$$

   Montrons d'abord que $(\mathbb{R}^2,+)$ est un groupe abélien. C'est facile de remarquer que la loi $+$ n'est pas commutative c'est à dire

$$\exists (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, \text{tels que } (x,y)+(x',y') \neq (x',y')+(x,y).$$

   Car

$$(x,y)+(x',y') = (x+y, x+y+x'+y') \text{ et } (x',y')+(x,y) = (x'+y', x+y+x'+y').$$

   Exemple :
   $(1,2)+(3,4) = (3,10)$ et $(3,4)+(1,2) = (7,10)$ d'où $(1,2)+(3,4) \neq (3,4)+(1,2)$ On déduit que $(\mathbb{R}^2,+,.)$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Partie 2

Soit $E = R_+^* \times \mathbb{R}$ on définit une loi interne $(+)$ et une loi externe$(.)$

$$(x,y)+(x',y') = (xx', y+y') \text{ et } \lambda.(x,y) = (x^\lambda, \lambda y), \quad \forall (x,y),(x',y') \in E \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Montrons que $(E,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrons que $(E,+)$ est un groupe abélien et que la loi externe (.) vérifie les quatres propriétés (1),(2), (3) et (4).

Montrons que $(E,+)$ groupe abélien

1. Montrons que $(+)$ est commutative, c'est à dire $\forall (x,y),(x',y') \in E, (x,y)+(x',y') = (x',y')+(x,y)$ on a $(x,y)+(x',y') = (xx', y+y') = (x'x, y'+y) = (x',y')+(x,y)$ (car la multiplication et l'addition dans $\mathbb{R}$ sont commutatives) ($(\mathbb{R},+,.)$ est un corps commutatif). D'où $+$ est commutative dans E.

Rappelons qu'on note de la même façon l'addition $+$ dans $\mathbb{R}$ et l'addition $+$ dans E, pour savoir quelle est la loi utilisée, il suffit de regarder les éléments composés (si on compose deux éléments de E donc la loi $+$ est celle de E, si on compose des éléments de $\mathbb{R}$ alors la loi $+$ est celle de $\mathbb{R}$)

2. Montrons que $+$ est associative dans E.

$$\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'') \in E, [(x,y)+(x',y')]+(x'',y'') = (x,y)+[(x',y')+(x'',y'')]$$

   on a

$$\begin{aligned}
[(x,y)+(x',y')]+(x'',y'') &= (xx', y+y')+(x'',y'') (\text{par définition de la loi}(+)) \\
&= ((xx')x'', (y+y')+y'') = (x(x'x''), y+(y'+y'')) \\
&((+) \text{ et } (.) \text{ sont associatives dans } \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{R}^* \text{ respectivement}) \\
&= (x,y)+(x'x'', y'+y'') = (x,y)+[(x',y')+(x'',y'')].
\end{aligned}$$

3. Montrons qu'il existe un élément neutre (e_1, e_2) de E tel que $(x,y)+(e_1,e_2) = (e_1,e_2)+(x,y) = (x,y)$ comme on a montré que + est commutative, donc, il suffit de résoudre une seule équation $(x,y)+(e_1,e_2) = (x,y)$

$$\begin{aligned}(x,y)+(e_1,e_2) = (x,y) &\iff (xe_1,\ y+e_2) = (x,y)\\ &\iff xe_1 = x \text{ et } y+e_2 = y\\ &\iff e_1 = 1 \text{ et } e_2 = 0.\end{aligned}$$

   on a aussi $(e_1,e_2) = (1,0)$ appartient à E, et donc $(1,0)$ est lélément neutre de $(E,+)$

4. Tout élément de E est symétrisable, c'est à dire $\forall (x,y) \in E, \exists (x^{'}, y^{'}) \in E$, tel que $(x,y)+(x^{'},y^{'}) = (x^{'},y^{'})+(x,y) = (e_1,e_2) = (1,0)$ Comme la loi est commutative, alors il suffit de résoudre une seule équation.

$$(x,y)+(x^{'},y^{'}) = (1,0) \iff (xx^{'}, y+y^{'}) = (1,0) \iff xx^{'} = 1 \text{ et } y+y^{'} = 0 \iff x^{'} = x^{-1} et y^{'} = -y$$

   x^{-1}, existe car $x \in \mathbb{R}^*$, le symétrique de x par rapport à la loi (.) de $\mathbb{R}$ (même raison $(\mathbb{R},+,.)$ est un corps commutatif) . D'où

$$\forall (x,y) \in E, \exists (x^{'},y^{'}) = (x^{-1},-y) \in E, \text{tel que } (x,y)+(x^{'},y^{'}) = (x^{'},y^{'})+(x,y) = (1,0).$$

De (1), (2), (3) et (4) on déduit que $(E,+)$ est un groupe abélien.

Montrons que les quatres propriétés de la loi externe sont vérifiées

1.

$$\begin{aligned}\alpha.[(x,y)+(x^{'},y^{'})] = \alpha.(xx^{'},y+y^{'}) = ((xx^{'})^{\alpha}, \alpha(y+y^{'})) = (x^{\alpha}(x^{'})^{\alpha}, \alpha y+\alpha y^{'})\\ = (x^{\alpha},\alpha y)+((x^{'})^{\alpha},\alpha y^{'}) = \alpha.(x,y)+\alpha.(x^{'},y^{'})\end{aligned}$$

2.

$$(\alpha+\beta).(x,y) = (x^{\alpha+\beta},(\alpha+\beta)y) = (x^{\alpha}.x^{\beta},\alpha y+\beta y) = (x^{\alpha},\alpha y)+(x^{\beta},\beta y) = \alpha(x,y)+\beta.(x,y)$$

3.

$$\alpha.(\beta.(x,y)) = \alpha.(x^{\beta},\beta y) = ((x^{\beta})^{\alpha},\alpha(\beta y)) = (x^{\alpha\beta},\alpha\beta y) = (\alpha\beta).(x,y).$$

4.

$$1.(x,y) = (x^1, 1y) = (x,y)$$

Partie 3

Nous rappelons la définition de sous espace vectoriel. Etant donné $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Soit F un sous ensemble de E. On dit que $(F,+,.)$ est un sous espace vectoriel de E si et seulement si $F \neq \emptyset$ et $(\forall x, y, \in F, x+y \in F$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \lambda.x \in F)$.

$$\text{F un sous espace vectoriel de } E \iff F \neq \emptyset \text{ et } (\forall x,\ y \in F, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}, \alpha.x+\beta.y \in F).$$

On une condition nécessaire pour que F soit un sous espace vectoriel. Si F est un sous espace vectoriel de E alors $(E,+)$ est un sous groupe de $(E,+)$, donc l'élément neutre 0_E appartient à F. En général, on utilise cette propriété dans le cas de contrapposée

$$\boxed{\text{L'élément neutre } 0_E \notin F \Longrightarrow F \text{ n'est pas un sous espace vectoriel de } E.}$$

Comme

(a) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x+y+\alpha=0 \text{ et } x+3\alpha z=0,\ \alpha\in\mathbb{R}\}$ $A\subset\mathbb{R}^3$, a-t-on A un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? On distingue deux cas selon la valeur de α.

cas ($\alpha=0$) alors A devient

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x+y=0 \text{ et } x=0,\} \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x=y=0\} \\ &= \{(0,0,z):\ z\in\mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Montrons que A est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

- $A\neq\emptyset$ car $(0,0,0)\in A$.
- Soient $X=(0,0,z_1), Y=(0,0,z_2)\in A, X+Y=(0,0,z_1)+(0,0,z_2)=(0,0,z_1+z_2)\in A$. car $z_1+z_2\in\mathbb{R}$.
- Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, et $X=(0,0,z)\in A, \lambda.X=\lambda.(0,0,z)=(0,0,\lambda z)\in A$, car $\lambda z\in\mathbb{R}$

de ce qui précéde, on déduit que A est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

cas ($\alpha\neq 0$) , $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x+y+\alpha=0 \text{ et } x+3\alpha z=0,\ \alpha\in\mathbb{R}\}$, on remarque que l'élément neutre $(0,0,0)$ n'appartient pas à A donc A n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(b) $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x-y^2=0\}$, $B\subset\mathbb{R}^2$, a-t-on B un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

- On a $B\neq\emptyset$ car $(0,0)\in B$,
- Soient $X=(x,y), Y=(x',y')\in B$, a-t-on $X+Y\in B$? $X+Y=(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')\in^? B$ c'est 'a dire a-t-on $(x+x')-(y+y')^2=^?0, (x+x')-(y+y')^2=x+x'-y^2-(y')^2+2yy'=2yy'\neq 0\ \forall y,y'\in\mathbb{R}^*$. contre exemple $X=(1,1), Y=(4,2)\in B$ car $1-1^2=0$ et $4-2^2=0$ mais $X+Y=(5,3)\notin B$ car $(5)-(3)^2=-4\neq 0$.

Donc B n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

(c) $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z=1\}$, $C\subset\mathbb{R}^3$, a-t-on C un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? C n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car l'élément neutre $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\notin C$

(d) $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$, $D\subset\mathbb{R}^3$, a-t-on D un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

- On a $D\neq\emptyset$ car $(0,0,0)\in D$,
- Soient $X=(x,y,z), Y=(x',y',z')\in D$, a-t-on $X+Y\in D$? $X+Y=(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')\in^? D$ c'est à dire a-t-on $(x+x')^2+(y+y')^2+(z+z')^2\leqslant^? 1, (x+x')^2+(y+y')^2+(z+z')^2=x^2+(x')^2+2xx'+(y')^2+y^2+2yy'+(z')^2+z^2+2zz'=(x^2+y^2+z^2)+((x')^2+(y')^2+(z')^2)+2(xx'+yy'+zz')\leqslant 2+2(xx'+yy'+zz')\leqslant^? 1\ \forall x,x',y,y',z,z'\in\mathbb{R}$. contre exemple $X=(0,0,1), Y=(0,1,0)\in D$ car $0^2+0^2+1^2\leqslant 1$ et $0^2+1^2+0^2\leqslant 1$ mais $X+Y=(0,1,1)\neq D$ car $0^2+1^2+1^2=2\nleqslant 1$.

Donc D n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

(e) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ e^xe^y=0\}$, $A\subset\mathbb{R}^3$, a-t-on E un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? n'est pas un sous espace vectoriel de R^3 car $E=\emptyset$.

(f) $F=\{f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}): f \text{croissante}\}$, $A\subset\mathbb{R}^3$, a-t-on F un sous espace vectoriel de $(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,.)$?

$$\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})=\{f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \text{ fonction}\}$$

muni de d'une loi interne + définie par $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ et d'une loi externe (.) $(\alpha.f)(x)=\lambda f(x)$.

$$f\text{croissante} \iff [\forall\ x,y\in\mathbb{R},\ x\leqslant y\Longrightarrow f(x)\leqslant f(y)].$$

Si on prend un élément f de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on prend un scalaire $\alpha\in\mathbb{R}$ négatif alors $\alpha.f$ devient décroissante. donc

$$\alpha.f\notin F.$$

et donc F n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} f\text{croissante} \iff [\forall\ x,y\in\mathbb{R},\ x\leqslant y &\Longrightarrow f(x)\leqslant f(y) \\ &\Longrightarrow -f(x)\geqslant -f(y). \\ &\Longrightarrow ((-1)f)(x)\geqslant((-1)f)(y) \\ &\Longrightarrow (-f)(x)\geqslant(-f)(y).] \end{aligned}$$

d'où $-f$ est décroissante.

Exercice 2

Question 1

Soit

$$\mathbb{F}_{(a,b)} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + az = b^2 - 4.\right\},\ \text{où } a,b \in \mathbb{R}$$

Pour quelles valeurs de a, b telles que $\mathbb{F}_{(a,b)}$ soit un sous espace vectoriel de R^3 ?
On distingue deux cas :

$$\boxed{[\text{cas } b^2 - 4 = 0] \text{ c'est à dire } b = 2 \text{ ou } b = -2}$$

$\mathbb{F}_{(a,2)} = \mathbb{F}_{(a,-2)} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + az = 0\}$ sont deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ car

* $\boxed{\mathbb{F}_{(a,2)} \text{ (resp. } \mathbb{F}_{(a,-2)}) \neq \emptyset \text{ car } (0,0,0) \in \mathbb{F}_{(a,2)}(resp.\mathbb{F}_{(a,-2)})}$

** $\boxed{\forall (x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{F}_{(a,2)} \text{ (resp. } \mathbb{F}_{(a,-2)}) \text{, on a } (x,y,z) + (x',y',z') \in \mathbb{F}_{(a,2)} \text{ (resp. } \mathbb{F}_{(a,-2)})}$

car $(x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z') \overset{?}{\in} \mathbb{F}_{(a,2)}$ (resp. $\mathbb{F}_{(a,-2)}$) $\iff (x+x') - (y+y') + a(z+z') \overset{?}{=} 0.$

On a

$$(x+x') - (y+y') + a(z+z') = (x - y + az) + (x' - y' + az') = 0 + 0 = 0$$

(car $(x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{F}_{(a,2)}$ (resp. $\mathbb{F}_{(a,-2)}$) c'est à dire $x - y + az = 0$ et $x' - y' + az' = 0$.

*** $\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x,y,z) \in \mathbb{F}_{(a,2)} \text{ (resp. } \mathbb{F}_{(a,-2)}) \text{ on a } \alpha.(x,y,z) \in \mathbb{F}_{(a,2)} \text{ (resp. } \mathbb{F}_{(a,-2)})}$

$$\alpha.(x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \overset{?}{\in} \mathbb{F}_{(a,2)} \text{ (resp. } \mathbb{F}_{(a,-2)}) \iff \alpha x - \alpha y + \alpha a z \overset{?}{=} 0$$

On a $\alpha x - \alpha y + \alpha a z = \alpha(x - y + az) = \alpha 0 = 0$

(car $(x,y,z) \in \mathbb{F}_{(a,2)}$ (resp. $\mathbb{F}_{(a,-2)}$) d'où $x - y + az = 0$).

de $(*)$, $(**)$ et $(***)$ on déduit que $\mathbb{F}_{(a,2)}$ (resp. $\mathbb{F}_{(a,-2)}$) est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{[\text{cas } b^2 - 4 \neq 0] \text{ c'est dire } b \neq 2 \text{ et } b \neq -2}$$

$\mathbb{F}_{(a,b)}$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car l'élément neutre de $\mathbb{R}^3$, $(0,0,0) \notin \mathbb{F}_{(a,b)}$.

Question 2

Soit

$$\mathbb{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = 0\}$$

Question 2a Détérminons une base de F, Rappelons qu'une base est une famille ***génératrice*** et ***libre***.
cherchons d'abord une famille génératrice de $\mathbb{F}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{F} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = 0\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = -x + y\} \\
&= \{(x,y,-x+y),\ x,y \in \mathbb{R}, \\
&= \{(x,0,-x) + (0,y,y),\ x,y \in \mathbb{R}\}. \\
&= \{x(1,0,-1) + y(0,1,-1),\ x,y \in \mathbb{R}\}. \\
&= \{x v_1 + y v_2,\ x,y \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

où $v_1 = (1,0,-1)$, $v_2 = (0,1,1)$ B est une famille génératrice de $\mathbb{F}$, est elle libre ?

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha v_1 + \beta v_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0.$$

$$\begin{aligned}\alpha v_1+\beta v_2=0_{\mathbb{R}^3} &\Longrightarrow \alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,1)=(0,0,0)\\ &\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha=0\\ \beta=0\\ -\alpha+\beta=0\end{array}\right.\\ &\Longrightarrow \alpha=\beta=0.\end{aligned}$$

D'où B est une famille libre, alors B est une base de $\mathbb{F}$ (car B est libre et génératrice).

Question 2b

D'aprés le théorème de la base incomplète, (Toute famille libre de $\mathbb{R}^3$ peut être complétée pour avoir une base de $\mathbb{R}^3$).

Rappelons que la dimension d'un espace vectoriel est le cardinal de l'une de ses bases,

sachant que toutes les bases d'un espace vectoriel ont même cardinal.

rappelons que $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel de dimension 3, on a une base appelée "base canonique"

$e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)$.

Comme la dimension de $\mathbb{R}^3$ est égale à 3, et le cardinal de B (nombre d'élément de B) est 2, donc il suffit de compléter B par un seul vecteur V_3 tel que (v_1, v_2, v_3) soit libre. En général, on prend l'un des vecteurs de la base canonique.

(mais on peut prendre n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie la condition d'inépendance,

la famille obtenue soit libre.)

soit $v_3=(0,1,0)$, a t-on (v_1, v_2, v_3) libre ?

$$\begin{aligned}\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0_{\mathbb{R}^3} &\Longrightarrow \alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,1)+\gamma(0,1,0)=(0,0,0)\\ &\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha=0\\ \beta+\gamma=0\\ -\alpha+\beta=0\end{array}\right.\\ &\Longrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0.\end{aligned}$$

d'où $B'=(v_1, v_2, v_3)$ est libre donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. (car $card(B')=\dim(\mathbb{R}^3)=3$)

Question 2c

Les coordonnées de $X=(1,1,1)$ dans la nouvelle base B' de $\mathbb{R}^3$. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les coordonnées de X relativement à B'. Soit

$$X=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3.$$

Détérminons α_1, α_2 et α_3. On a

$$\begin{aligned}\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3=X &\Longrightarrow \alpha_1(1,0,-1)+\alpha_2(0,1,1)+\alpha_3(0,1,0)=(1,1,1)\\ &\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha_1=1\\ \alpha_2+\alpha_3=1\\ -\alpha_1+\alpha_2=1\end{array}\right.\\ &\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha_1=1\\ \alpha_2=2\\ \alpha_3=-1\end{array}\right.\end{aligned}$$

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^4$, soit les vecteurs suivants : $u=(1,-1,0,2)$, $x=(1,2,3,0)$, $y=(0,-1,2,-2)$, $z=(3,7,7,2)$, $v=(0,-9,-9,6)$.

Question 1

Montrons que $z\in<x,y>$ et $v\in<x,u>$.

Montrons que $z\in<x,y>$

$$\begin{aligned} z\in<x,y> &\Longleftrightarrow \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \text{ tels que } z=\alpha x+\beta y \\ &\Longleftrightarrow \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R}, (3,7,7,2)=\alpha(1,-1,0,2)+\beta(1,2,3,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z=\alpha x+\beta y &\Longleftrightarrow (3,7,7,2)=\alpha(1,2,3,0)+\beta(0,-1,2,-2) \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha=3 \\ 2\alpha-\beta=7 \\ 3\alpha+2\beta=7 \\ -2\beta=2 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \alpha=3 \\ \beta=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

on déduit que $z=3x-y$ d'où $z\in<x,y>$.

Montrons que $v\in<x,u>$

$$\begin{aligned} v\in<x,u> &\Longleftrightarrow \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \text{ tels que } v=\alpha x+\beta u \\ &\Longleftrightarrow \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R}, (0,-9,-9,6)=\alpha(1,-1,0,2)+\beta(1,-1,0,2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v=\alpha x+\beta u &\Longleftrightarrow (0,-9,-9,6)=\alpha(1,2,3,0)+\beta(1,-1,0,2) \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ 2\alpha-\beta=-9 \\ 3\alpha=-9 \\ 2\beta=6 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \alpha=-3 \\ \beta=3 \end{cases} \end{aligned}$$

on déduit que $v=-3x+3u$ d'où $v\in<x,u>$.

Question 2

Soit $F=<x,y,z>$ et $G=<u,v>$. Trouver la dimension des sous-espaces vectoriels $F,G,F+G$ et $F\cap G$.

- Dimension de F.
  On a $F=<x,y,z>$, comme $z=3x-y$ (voir la première question) alors $F=<x,y>$, $\{x,y\}$ est une famille génératrice de F, est elle libre ?

$$\begin{aligned} \alpha x+\beta y=0_{\mathbb{R}^4} &\Longrightarrow \alpha(1,2,3,0)+\beta(0,-1,2,-2)=(0,0,0,0) \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ 2\alpha-\beta=0 \\ 3\alpha+2\beta=0 \\ -2\beta=0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \alpha=\beta=0. \end{aligned}$$

  D'où $\{x,y\}$ est une famille libre, alors $\{x,y\}$ est une base de F, d'où $\dim(F)=2$.

- $\boxed{\text{Dimension de } G}$.
  On a $G =< u, v >$, $\{u, v\}$ est une famille génératrice de G, est elle libre ?

$$\alpha u + \beta v = 0_{\mathbb{R}^4} \Longrightarrow \alpha(1,-1,0,2) + \beta(0,-9,-9,6) = (0,0,0,0)$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ -\alpha - 9\beta = 0 \\ -9\beta = 0 \\ 2\alpha + 6\beta = 0 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \alpha = \beta = 0.$$

  D'où $\{u, v\}$ est une famille libre, alors $\{u, v\}$ est une base de G, d'où $\dim(G) = 2$.
- $\boxed{\text{Dimension de } F+G}$.
  On a $F + G =< x, y, u, v >$,
  comme $v = 3x - 3u$ (voir la première question) alors

$$F + G =< x, y, u >,$$

  donc $\{x, y, u\}$ est une famille génératrice de $F + G$, est elle libre ?

$$\alpha x + \beta y + \gamma u = 0_{\mathbb{R}^4} \Longrightarrow \alpha(1,2,3,0) + \beta(0,-1,2,-2) + \gamma(1,-1,0,2) = (0,0,0,0)$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \qquad (1) \\ 2\alpha - \beta - \gamma = 0 \qquad (2) \\ 3\alpha + 2\beta = 0. \qquad (3) \\ -2\beta + 2\gamma = 0 \qquad (4) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha = -\gamma \qquad \text{de} \quad (1) \\ \beta = \gamma \qquad \text{de} \quad (4) \\ -2\gamma = 0 \qquad \text{de } (2) \\ 5\gamma = 0 \qquad \text{de} \quad (3) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

  D'où $\{x, y, u\}$ est une famille libre, alors $\{x, y, u\}$ est une base de $F + G$, d'où $\dim(F + G) = 3$.
- $\boxed{\text{Dimension de } F \cap G}$.
  on a la formule

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

  Et donc $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) = 2 + 2 - 3 = 1$.

Question 3

Montrer que le sous espace $H =< (1,2,3,1) >$ est supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ de $F + G$. En déduire celui de $F \cap G$.

Comme $F + G$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 4, d'après le théorème de la base incomplète, il existe un supplémentaire H' de dimension 1, tel que $(F+G)+H' = \mathbb{R}^4$ et $(F+G)\cap H' = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. (autrement dit $(F + G) \oplus H' = \mathbb{R}^4$) et $\dim(H') = 1$ c'est à dire que H' est engendré par un seul vecteur.

$(F + G) + H$ est un sous espace vectoriel engendré par la réunion de familles géneratrice de (F+G) et celle de H, donc $(F + G) + H =< x, y, u, (1,2,3,4) >$.
Comme $\dim((F + G) + \dim(H) = 3 + 1 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ alors pour montrer que $(F + G)$ et H sont supplémentaires , il faut et il suffit de montrer que la famille génératrice de $(F + G) + H$, $\{x, y, u, (1,2,3,1)\}$, est

libre.
Montrons que la famille $\{x, y, u, (1,2,3,1)\}$ est libre.

$$\alpha x+\beta y+\gamma u+\lambda(1,2,3,1)=0_{\mathbb{R}^4} \Longrightarrow \alpha(1,2,3,0)+\beta(0,-1,2,-2)+\gamma(1,-1,0,2)+\lambda(1,2,3,1)=(0,0,0,0)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma+\lambda=0 & (1) \\ 2\alpha-\beta-\gamma+2\lambda=0 & (2) \\ 3\alpha+2\beta+3\lambda=0. & (3) \\ -2\beta+2\gamma+\lambda=0 & (4) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \beta=-3\gamma & \text{de} \quad 2.(1)-(2) \\ \lambda=-8\gamma & \text{de} \quad (4) \\ \alpha=7\gamma & \text{de } (1) \\ -9\gamma=0 & \text{de} \quad (3) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \alpha=\beta=\gamma=\lambda=0.$$

D'où $\{x, y, u, (1,2,3,1)\}$ est une famille libre, $F+G$ et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Supplémentaire de $F\cap G$ On a $\dim(F\cap G)=1$ et $x\in F\cap G$ (d'après la première question $v=-3x+3u$ donc $x=\frac{1}{3}(3u-v)=u-\frac{1}{3}v$ d'où $x\in G$ et donc $F\cap G=<x>$.
On a $(F+G)+H=<x, y, u, (1,2,3,1)>=\mathbb{R}^4$ et on déduit alors que le supplémentaire de $F\cap G$ dans R^4 est le sous espace vectoriel L engendré par $\{y, u, (1,2,3,1)\}$, $L=<y, u, (1,2,3,1)>$.

Exercice 4

Soit $E = \triangle(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble de fonctions dérivables. Considérons les ensembles suivants :

$$F = \{f \in E : f(0) = f'(0) = 0\} \text{ et } G = \{f \in E : f(x) = ax + b, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Montrons que F est un sous espace vectoriel de E

1. $F \neq \emptyset$ car l'application nulle e appartient à F, ($e(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$)
2. Soient $f, g \in F$ a-t-on $f + g \in F$? est ce que $(f+g)(0) = (f+g)'(0) = 0$?
   On a $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$ (car $f, g \in F$)
   $(f+g)'(0) = f'(0) + g'(0) = 0 + 0 = 0$ (voir les propriétés des fonctions dérivables).
3. Soient $f \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, a-t-on $\lambda f \in F$? est ce que $(\lambda f)(0) = (\lambda f)'(0) = 0$?
   On a $(\lambda f)(0) = \lambda f(0) = \lambda 0 = 0$ (car $f \in F$)
   $(\lambda f)'(0) = \lambda f'(0) = \lambda 0 = 0$ (voir les propriétés des fonctions dérivables et $f \in F$)

F est un sous espace vectoriel de E.

Montrons que G est un sous espace vectoriel de E

1. $G \neq \emptyset$ car l'application nulle e appartient à G, $(e(x) = 0 = 0x + 0,$ donc $a = b = 0)$.
2. Soient $f, g \in G$ a-t-on $f + g \in G$? est ce que $\exists \alpha, \ \beta \in \mathbb{R}$ tel que $(f+g)(x) = \alpha x + \beta$?
   $f \in G$ alors $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax + b$
   $g \in G$ alors $\exists a', b' \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = a'x + b'$
   On a

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (ax+b) + (a'x+b') = (a+a')x + (b+b') = \alpha x + \beta$$

(il suffit de prendre $\alpha = a + a'$ et $\beta = b + b'$)

3. Soient $f \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ a-t-on $\lambda f \in G$? est ce que $\exists^{?} \alpha, \ \beta \in \mathbb{R}$ tel que $(\lambda f)(x) = \alpha x + \beta$
   $f \in G$ alors $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax + b$
   On a

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda(ax+b) = (\lambda a)x + (\lambda b) = \alpha x + \beta \text{ (il suffit de prendre } \alpha = \lambda a \text{ et } \beta = \lambda b$$

G est un sous espace vectoriel de E.

Montrons que F et G sont supplémentaires dans E

Pour que F et G soient supplémentaires dans E il faut et il suffit que $\boxed{F + G = E}$ et $\boxed{F \cap G = \{e\}}$, avec e(x)=0,$\forall x \in \mathbb{R}$.

Montrons que $F \cap G = \{e\}$

Soit $f \in F \cap G$ alors $f \in G$ et $f \in F$.

$$f \in G \Longrightarrow \exists a, \ b \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) = ax + b,$$

comme $f \in F$ alors f(0)=b=0 et f'(0)=a=0 d'où $f = e$, l'application nulle.
on déduit alors $F \cap G = \{e\}$, avec $e(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Montrons que $F + G = E$

on a $F + G$ un sous espace vectoriel de E, alors $F + G \subset E$, montrons donc $E \subset F + G$ c'est à dire

$$\forall h \in E, \exists f \in F \text{ et } g \in G \text{ telles que } h = f + g$$

h étant donnée, cherchons f et g.

$$f \in F \Longrightarrow f(0) = f'(0) = 0$$

et

$$g \in G \Longrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } g(x) = ax + b.$$

On a alors $h(0) = f(0) + g(0) = 0 + b = b$ alors $b = h(0)$, et $h'(0) = f'(0) + g'(0) = 0 + a = a$ alors $a = h'(0)$ et donc $\boxed{g(x) = h'(0)x + h(0)}$.

Et $f(x) = h(x) - g(x) = h(x) - h'(0)x - h(0)$, $\boxed{f(x) = h(x) - h'(0)x - h(0)}$.

on peut vérifier que $f(0) = f'(0) = 0$ c'est à dire $f \in F$

Conclusion : $\boxed{F + G = E \text{ donc } F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E}$.