Table des matières

1 Les espaces vectoriels **2**

2 Les applications linéaires **3**

2.1 Morphisme d'espaces vectoriels 3

2.2 Image et noyau d'une application linéaire 5

2.2.1 Image d'une application linéaire 5

2.2.2 Noyau d'une application linéaire 5

Bibliographie **8**

Chapitre 1

Les espaces vectoriels

Chapitre 2

Les applications linéaires

2.1 Morphisme d'espaces vectoriels

Définition 2.1. Soient $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels. Une application $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ est dite **linéaire** si les conditions suivantes sont vérifiées :

a) $\forall\ x, y \in \mathbf{E} :\ f(x+y) = f(x) + f(y)$

b) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall\ x \in \mathbf{E} : f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$.

On dit dans ce cas que f est un **homomorphisme ou morphisme** d'espaces vectoriels.

- Si $\mathbf{E} = \mathbf{F}$, et f linéaire, on dit que f est un **endomorphisme** de $\mathbf{E}$.
- Si f est linéaire et bijective, on dit que f est un **isomorphisme** d'espaces vectoriels.
- si f est un endomorphisme bijectif, on dit que f est un **automorphisme** de $\mathbf{E}$.

On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{F}$, espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Exemple 2.1. *Soit l'application f définie par*

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (2x, -y) \end{array}$$

• *soit* $X=(x,y)$ *et* $X'=(x',y')\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(X+X') &= f[(x,y)+(x',y')] \\ &= f(x+x',y+y') \\ &= (2(x+x'),-y-y') \\ &= (2x,-y)+(2x',-y) \\ &= f(X)+f(X'). \end{aligned}$$

• *Soit* $\lambda\in\mathbb{R}$ *et* $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(\lambda X) &= f[\lambda(x,y)] \\ &= f(\lambda x,\lambda y) \\ &= (2\lambda x,-\lambda y) \\ &= \lambda(2x,-y) \\ &= \lambda f(X). \end{aligned}$$

Donc f *est linéaire.*

Théorème 2.1. *Soient* $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ *deux* $\mathbb{K}$ *espaces vectoriels et* $f:\mathbf{E}\longrightarrow\mathbf{F}$ *une application. Alors*
f *est linéaire* $\Longleftrightarrow\forall\ x,y\in\mathbf{E},\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}: f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y).$

Preuve. $\Longrightarrow$) on suppose que f est linéaire
Soient $x,y\in\mathbf{E}$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$:
$f(\alpha x+\beta y)=f(\alpha x)+f(\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y).$
$\Longleftarrow$) On suppose que $\forall\ x,y\in\mathbf{E},\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}: f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$
pour $\alpha=\beta=\mathbf{1}_{\mathbb{K}}\Longrightarrow f(x+y)=f(x)+f(y)$
pour $\beta=0_{\mathbb{K}}\Longrightarrow f(\alpha x)=\alpha f(x)$. D'où d'après la définition ci-dessus f est linéaire. $\square$

Remarque 2.1. Si f est linéaire alors $f(0_{\mathbf{E}})=0_{\mathbf{F}}$. En effet
$\forall\ \alpha\in\mathbb{K},\ \forall\ x\in\mathbf{E}: f(\alpha x)=\alpha f(x).$

Pour $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$: $f(0_{\mathbb{K}}x) = 0_{\mathbb{K}}f(x) = 0_{\mathbf{F}}$.

Donc, si $f(0_{\mathbf{E}}) \neq 0_{\mathbf{F}}$ alors f n'est pas linéaire.

Exemple 2.2. *L'application définie par*
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y+1 \end{array}$$
n'est pas linéaire car $f(0,0) \neq 0$.

Exercice 2.1. *Soit l'application définie par*
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$$
Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ est déterminer son automorphisme réciproque.

2.2 Image et noyau d'une application linéaire

2.2.1 Image d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ **l'image** de $\mathbf{E}$ par f est notée par Imf définie par

$$Imf = \{y \in \mathbf{F}, \exists x \in \mathbf{E} : y = f(x)\} = f(\mathbf{E}).$$

Théorème 2.2. *Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Alors l'image par f d'un sous espace vectoriel de $\mathbf{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbf{F}$.*

Preuve. Soit $\mathbf{H}$ un s.e.v. de $\mathbf{E}$, montrons que $f(\mathbf{H})$ est un s.e.v. de $\mathbf{F}$.

• On a $f(\mathbf{H}) \neq \emptyset$ car $f(0_{\mathbf{E}}) = 0_{\mathbf{F}} \in f(\mathbf{H})$.

• Soit $y_1,\ y_2 \in f(\mathbf{H})$ et $\alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$: $\alpha y_1 + \beta y_2 \in f(\mathbf{H})$: $\alpha y_1 + \beta y_2 \in f(\mathbf{H})$?

On a $y_1 \in f(\mathbf{H}) \Longrightarrow \exists x_1 \in \mathbf{H} : y_1 = f(x_1)$.

$y_2 \in f(\mathbf{H}) \Longrightarrow \exists x_2 \in \mathbf{H} : y_2 = f(x_2)$.

$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = f(\alpha x_1 + \beta x_2)$ car f est linéaire.

Or $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathbf{H}$ car $\mathbf{H}$ est un s.e.v. de $\mathbf{E}$. Donc $\alpha y_1 + \beta y_2 \in f(\mathbf{H})$.

D'où $f(\mathbf{H})$ est un s.e.v. de $\mathbf{F}$. □

2.2.2 Noyau d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. L'ensemble des vecteurs de $\mathbf{E}$ qui ont pour image le vecteur $0_{\mathbf{F}}$ est appelé **noyau** de f et on le note $\ker f$.

$$\ker f = \{x \in \mathbf{E} : f(x) = 0_{\mathbf{F}}\} = f^{-1}(\{0_{\mathbf{F}}\}).$$

Remarque 2.2. $\ker f$ n'est jamais vide car $\forall\ f$ linéaire $f(0_{\mathbf{E}}) = 0_{\mathbf{F}} \Longrightarrow 0_{\mathbf{E}} \in \ker f$.

Exemple 2.3. *Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par*
$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (y+z, x+z, x+y) \end{array}.$$
a) *Dérerminer Imf, puis donner une base de Imf.*

b) *Déterminer $\ker f$.*

a) *Soit $Y \in Imf$.*

$$\begin{aligned} Y = (y+z, x+z, x+y) &= (0,x,x) + (y,0,y) + (z,z,0) \\ &= x(0,1,1) + y(1,0,1) + z(1,1,0). \end{aligned}$$

Donc $Imf =< v_1 = (0,1,1),\ v_2 = (1,0,1),\ v_3 = (1,1,0) >$

De plus la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre . Donc c'est une base de Imf.

$\dim Imf = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ *et comme* $Imf \subset \mathbb{R}^3$ *alors* $Imf = \mathbb{R}^3$

b) $\ker f = \{X \in \mathbb{R}^3 : f(X) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$$f(X) = (y+z, x+z, x+y) = (0,0,0) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y+z=0 \\ x+z=0 \\ x+y=0 \end{array} \right. \Longrightarrow (x,y,z) = (0,0,0).$$

D'où $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Théorème 2.3. *Pour toute application linéaire, $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$. $\ker f$ est un sous espace vectoriel de $\mathbf{E}$.*

Preuve. • On a $\ker f \neq \emptyset$ car $0_{\mathbf{E}} \in \ker f$ (car $f(0_{\mathbf{E}}) = 0_{\mathbf{F}}$).

• Soit $x, y \in \ker f$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \alpha f(x) + \beta f(y) \text{ (car } f \text{ est linéaire} \\ &= \alpha 0_{\mathbf{F}} + \beta 0_{\mathbf{F}} \\ &\Longrightarrow \alpha x + \beta y \in \ker f \end{aligned}$$

D'où $\ker f$ est un s.e.v. de $\mathbf{E}$. □

Théorème 2.4. *Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Alors*

a) *f injective* $\Longleftrightarrow \ker f = \{0_{\mathbf{E}}\}$.

b) *f surjective* $\Longleftrightarrow Imf = \mathbf{F}$.

Preuve. **a)** $\Longrightarrow$) Supposons que f est injective et montrons que $\ker f = \{0_{\mathbf{E}}\}$.

Soit $x \in \ker f \Longrightarrow f(x) = 0_{\mathbf{F}} = f(0_{\mathbf{E}}) \Longrightarrow x = 0_{\mathbf{E}}$ (car f est injective).

D'où $\ker f = \{0_{\mathbf{E}}\}$.

$\Longleftarrow$) Supposons que $\ker f = \{0_{\mathbf{E}}\}$ et montrons que f est injective.

Soient $x_1,\ x_2 \in \mathbf{E}$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0_{\mathbf{F}} \\ &\Longrightarrow f(x_1 - x_2) = 0_{\mathbf{F}}(\text{car } f \text{ est linéaire} \\ &\Longrightarrow x_1 - x_2 = 0_{\mathbf{E}}\ (\text{car } \ker f = \{0_{\mathbf{E}}\} \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \\ &\Longrightarrow f est injective. \end{aligned}$$

b) $\Longrightarrow$) Supposons que f est surjective et montrons que $Imf = \mathbf{F}$.

On a $Im\mathbf{F} \subset \mathbf{F}$.

D'autre part $\forall\ y \in \mathbf{F} \Longrightarrow \exists x \in \mathbf{E} : y = f(x)$ (car f est surjective)

D'où $y \in Imf$. Par conséquant $Imf = \mathbf{F}$.

$\Longleftarrow$) Supposons que $Imf = \mathbf{F}$ et montrons que f est surjective.

$$\begin{aligned} Imf = \mathbf{F} &\Longrightarrow \mathbf{F} \subset Imf \\ &\Longrightarrow \forall\ y \in \mathbf{F} \Longrightarrow y \in Imf \\ &\Longrightarrow \exists x \in \mathbf{E} : y = f(x) \\ &\Longrightarrow f surjective. \end{aligned}$$

$\square$

Envoyer vos questions à l'adresse e-mail : *l_berdjoudj@yahoo.fr*

Bibliographie

[1] J. Grifone, « *Algèbre linéaire.* » Paris : Cepadues, 2015. **Côte : 512.5/109**

[2] A. Pillier, « *Algèbre linéaire : manuel d'exercices corrigés avec rappels de cours +interros.* » Paris : Premium, 2013. **Côte : 512.5/108**

[3] D. Prochasson, « *Algèbre : 1ère année : exercices corrigés.* » Paris : Francis Lefebvre, 2003. **Côte : 512/15**

[4] M. Queysanne, « *Algèbre : 1er cycle scientifique, préparation aux grandes écoles.* » Paris : Armand Colin, 1964. **Côte : 512/73**